



TUGAS AKHIR -SM141501

SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA DI SEKITAR DUA SILINDER SINGKULER *SIDE-BY-SIDE*

AMIRUL HAKAM
NRP 1211 100 072

Dosen Pembimbing
Dr. Chairul Imron, Ml. Komp.

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT -SM141501

***NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW AROUND
TWO CIRCULAR CYLINDERS SIDE-BY-SIDE***

AMIRUL HAKAM
NRP 1211 100 072

Supervisor
Dr. Chairul Imron, Ml. Komp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA DI SEKITAR DUA SILINDER SIRKULER *SIDE-BY- SIDE*

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW AROUND TWO CIRCULAR CYLINDERS SIDE-BY- SIDE

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

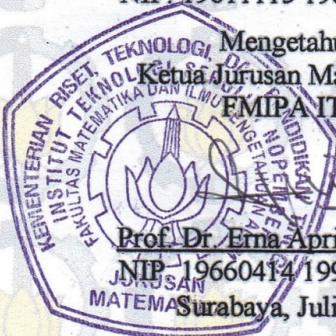
**AMIRUL HAKAM
NRP. 1211 100 072**

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,



Dr. Chairul Imron, MI. Komp
NIP. 19611115 198703 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001
Surabaya, Juli 2015

SIMULASI NUMERIK ALIRAN FLUIDA DI SEKITAR DUA SILINDER SIRKULER *SIDE-BY-SIDE*

Nama Mahasiswa : Amirul Hakam
NRP : 1211 100 072
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Chairul Imron, Ml. Komp.

Abstrak

Penerapan konsep fluida sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari salah satunya yaitu permasalahan fluida di sekitar silinder sirkuler. Pada penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan permasalahan fluida di sekitar dua silinder sirkuler yang tersusun *side-by-side* menggunakan persamaan Navier-Stokes. Persamaan Navier-Stokes *incompressible, viscous* dan *unsteady* diselesaikan menggunakan metode beda hingga *staggered grid* dan algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation*). Metode beda hingga digunakan untuk menyelesaikan susunan *grid* yang digunakan sedangkan algoritma SIMPLE digunakan untuk memperoleh nilai komponen kecepatan dan tekanan. Hasil dari penelitian ini adalah memperoleh nilai koefisien hambat yang berdasarkan profil aliran fluida dan distribusi tekanan yang diterima silinder. Profil aliran fluida disimulasikan dengan variasi bilangan Reynolds yaitu 100, 500, 1000, 3000, 5000 dan variasi jarak antar silinder dengan rasio $1.5 \leq L/D \leq 4$ dimana L adalah jarak antar silinder dan D adalah diameter silinder. Kemudian menghitung distribusi tekanan berdasarkan nilai komponen tekanan yang diterima silinder. Setelah memperoleh nilai distribusi tekanan, selanjutnya menghitung koefisien hambat yang diterima silinder. Hasilnya adalah semakin besar bilangan Reynolds maka semakin kecil koefisien hambat yang diterima silinder. Semakin lebar jarak antara silinder maka nilai koefisien hambat semakin kecil mendekati nilai koefisien hambat dalam kondisi silinder tunggal. Setelah koefisien hambat diselesaikan, membuat persamaan koefisien hambat terhadap jarak (L/D).

Kata Kunci: Persamaan Navier-Stokes, Aliran Fluida di Sekitar Dua Silinder, Koefisien Hambat.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW AROUND TWO CIRCULAR CYLINDERS SIDE-BY- SIDE

Name : Amirul Hakam
NRP : 1211 100 072
Department : Mathematics
Supervisor : Dr. Chairul Imron, MI. Komp

Abstract

The application of fluid concept is often used to solve problems in everyday, one of them is the problem of fluid around circular cylinder. In this study aims to solve the problems of fluid around two circular cylinders arranged side-by-side using the Navier-Stokes equations. Navier-Stokes equations for incompressible, viscous and unsteady solved using finite difference methods staggered grid and SIMPLE algorithms (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation). Finite difference method is used to solve for complete the grid arrangement and the SIMPLE algorithm is used to obtain components of velocity and pressure value. Results of this study was to obtain the coefficient of drag that is based on fluid flow profile and pressure distributions received cylinder. Fluid flow profile is simulated with variations of Reynolds numbers are 100, 500, 1000, 3000, 5000 and variation of the distance between cylinder with the ratio $1.5 \leq L/D \leq 4$ where L is the distance between the cylinder and D is the diameter of the cylinder. Then calculate the pressure distribution is based on the value of the received cylinder pressure components. After obtaining the pressure distribution value, then calculate the drag coefficient received cylinder. The result is greater the Reynolds number, the smaller the coefficient of drag that is acceptable cylinder. The wider the distance between the cylinder then drag coefficient smaller value closer to the value of the coefficient of the resistor in the condition of a single cylinder. Having completed the drag coefficient, making the coefficient of drag on the distance equation (L/D).

Keywords: Navier-Stokes Equations, Fluid Flow Around Two Cylinders, Drag Coefficient.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Segala Puji bagi Allah SWT Tuhan semesta alam yang telah memberikan karunia, rahmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul: **“Simulasi Numerik Aliran Fluida Di Sekitar Dua Silinder Sirkuler Side-By-Side”** yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Studi S-1 pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan berkat kerjasama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Chairul Imron, MI. Komp selaku dosen pembimbing yang senantiasa membimbing, memberikan kritik dan saran serta memberikan motivasi dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika.
3. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku dosen wali selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
4. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Drs. Iis Herisman, M.Si, Dra. Titik Mudjiati, M.Si dan Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir.
5. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS.
6. Teman-teman mahasiswa jurusan Matematika ITS

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

special thanks to

Selama proses pembuatan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

1. Bapak Suwarno dan Ibu Sri Wahyuning Tyas tersayang yang senantiasa dengan ikhlas memberikan doa, semangat dan nasehat lahir batin bagi penulis.
2. Kakak Swasty Nur Aini dan adik Nurul Fatonah yang menjadi salah satu dukungan dan mendorong penulis untuk segera menyelesaikan Tugas Akhir.
3. Teman terdekat Liyana Wulandhari yang turut andil memberikan energi untuk menemani dan memberikan ide dalam proses penyelesaian Tugas Akhir.
4. Sahabat Kontrakan Kejawan Gebang Gang III/20 yaitu Isman, Anas, Jamil, Ilham, Rifdi, Heri, Singgih dan Habib serta Tim SUWELAST yang tidak bosan untuk selalu memberikan energi keceriaan.
5. Penghuni Laboratorium dan teman-teman angkatan Matematika ITS 2011 dengan segala bentuk semangat dan dukungannya kepada penulis.

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis. *Amin ya rabbal 'alamin.*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix

BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Sistematika Penulisan.....	7

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Sebelumnya	9
2.1.1 Penelitian Sintu Singha dan K. P. Sinhamahapatra	9
2.1.2 Penelitian Sarvghad-Moghaddam dan Nooredin Navid	10
2.2 Fluida	11
2.2.1 Karakteristik Aliran Fluida	12
2.2.2 Viskositas	13
2.2.3 Rapat Jenis	13
2.2.4 Bilangan Reynolds	14
2.2.5 Koefisien Hambat	14
2.3 Persamaan Navier-Stokes	15
2.4 Algoritma SIMPLE (<i>Semi Implicit for Pressure-Linked Equation</i>).....	16

2.5 Metode Beda Hingga	17
2.5.1 Langkah-langkah Metode Beda Hingga ..	18
BAB III. METODOLOGI	
3.1 Tahapan Penelitian	25
3.2 Diagram Alur Metode Penelitian	29
BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
4.1 Penyelesaian Numerik	31
4.1.1 Diskritisasi	31
4.1.2 Strategi Penyelesaian	31
4.2 Penyusunan Algoritma	41
4.2.1 Algoritma Penyelesaian Persamaan Navier-Stokes	41
4.3 Analisis Penyelesaian	44
4.3.1 Hasil Simulasi Silinder Tunggal	44
4.3.2 Hasil Simulasi Dua Silinder	47
4.3.2.1 Uji Coba $Re=100$	47
4.3.2.2 Uji Coba $Re=500$	48
4.3.2.3 Uji Coba $Re=1000$	49
4.3.2.4 Uji Coba $Re=3000$	50
4.3.2.5 Uji Coba $Re=5000$	51
4.4 Persamaan Koefisien Hambat $C_d(L/D)$	52
4.4.1 Persamaan Koefisien Hambat $Re=100$	52
4.4.2 Persamaan Koefisien Hambat $Re=500$	55
4.4.3 Persamaan Koefisien Hambat $Re=1000$	58
4.4.4 Persamaan Koefisien Hambat $Re=3000$	60
4.4.5 Persamaan Koefisien Hambat $Re=5000$	63
BAB V. PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran	68
DAFTAR PUSTAKA	69
LAMPIRAN	71

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Koefisien hambatan hasil penelitian Sintu dan Sinmahapatra.....	10
Tabel 2.2 Koefisien hambatan hasil penelitian Sarvghad dan Nooredin	11
Tabel 4.1 Distribusi tekanan silinder tunggal pada $Re = 100, 500, 1000, 3000$ dan 5000	46
Tabel 4.2 Koefisien hambatan silinder tunggal	47
Tabel 4.3 Koefisien hambatan dua silinder $Re = 100$	48
Tabel 4.4 Koefisien hambatan dua silinder $Re = 500$	49
Tabel 4.5 Koefisien hambatan dua silinder $Re = 1000$	50
Tabel 4.6 Koefisien hambatan dua silinder $Re = 3000$	51
Tabel 4.7 Koefisien hambatan dua silinder $Re = 5000$	52
Tabel 4.8 Sebelas data koefisien hambatan dua silinder $Re = 100$	52
Tabel 4.9 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder atas $Re = 100$	54
Tabel 4.10 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder bawah $Re = 100$	55
Tabel 4.11 Sebelas data koefisien hambatan dua silinder $Re = 500$	55
Tabel 4.12 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder atas $Re = 500$	56
Tabel 4.13 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder bawah $Re = 500$	57
Tabel 4.14 Sebelas data koefisien hambatan dua silinder $Re = 1000$	58
Tabel 4.15 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder atas $Re = 1000$	59
Tabel 4.16 Error persamaan koefisien hambatan pada silinder bawah $Re = 1000$	60
Tabel 4.17 Sebelas data koefisien hambatan dua silinder $Re = 3000$	60

Tabel 4.18	Erör persamaan koefisien hambät pada silinder atas $Re=3000$	61
Tabel 4.19	Erör persamaan koefisien hambät pada silinder bawah $Re=3000$	62
Tabel 4.20	Sebelas data koefisien hambät dua silinder $Re=5000$	63
Tabel 4.21	Erör persamaan koefisien hambät pada silinder atas $Re=5000$	64
Tabel 4.22	Erör persamaan koefisien hambät pada silinder bawah $Re=5000$	65

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1.1 Skema aliran fluida di sekitar dua silinder	5
Gambar 2.1 Jenis-jenis aliran fluida : (a) Aliran Laminar, (b) Aliran Transisi, (c) Aliran Turbulen.....	12
Gambar 2.2 Distribusi tekanan $C_p(\theta)$	15
Gambar 2.3 Algoritma SIMPLE (<i>Semi Implicit Method for Pressure Linked-Equation</i>).....	17
Gambar 2.4 Tipe grid : (a) <i>Natural Grid</i> , (b) <i>Staggered Grid</i> , (c) <i>Partially Staggered Grid</i> , (d) <i>Cell-Centered Unstaggered Grid</i> , (e) <i>Staggered With Multiple Momentum Equations Grid</i>	19
Gambar 2.5 Skema beda hingga terhadap ruang dan waktu. (a) Skema beda mundur, (b) Skema beda maju, (c) Skema beda tengah	20
Gambar 3.1 Diagram alur metode penelitian	29
Gambar 4.1 Diagram alir algoritma penyelesaian persamaan Navier-Stokes.....	43
Gambar 4.2 Skema silinder tunggal.....	44
Gambar 4.3 Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder tunggal. (a) $Re=100$, (b) $Re=500$, (c) $Re=1000$, (d) $Re=3000$, (e) $Re=5000$ dan (f) Keterangan warna yang menunjukkan nilai dari komponen kecepatan.....	45
Gambar 4.4 Koefisien distribusi tekanan silinder tunggal pada $Re = 100, 500, 1000, 3000$ dan 5000	46
Gambar 4.5 Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=100$. (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$	48
Gambar 4.6 Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=500$. (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$	49
Gambar 4.7 Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=1000$. (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$	

	dan (d) $L/D=4$	50
Gambar 4.8	Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=3000$. (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$	51
Gambar 4.9	Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=5000$. (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$	52
Gambar 4.10	Data silinder atas $Re=100$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan.....	53
Gambar 4.11	Data silinder bawah $Re=100$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan	54
Gambar 4.12	Data silinder atas $Re=500$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan.....	56
Gambar 4.13	Data silinder bawah $Re=500$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan	57
Gambar 4.14	Data silinder atas $Re=1000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan.....	58
Gambar 4.15	Data silinder bawah $Re=1000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan	59
Gambar 4.16	Data silinder atas $Re=3000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan.....	61
Gambar 4.17	Data silinder bawah $Re=3000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan	62
Gambar 4.18	Data silinder atas $Re=5000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan.....	63
Gambar 4.19	Data silinder bawah $Re=5000$: (a) 11 data Koefisien hambaatan, (b) 4 data koefisien hambatan	64

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN	71
A.1 Kode Fungsi Inisial Kecepatan	71
A.2 Kode Fungsi Penyelesaian Persamaan Momentum (Persamaan Adveksi)	71
A.3 Kode Fungsi <i>Boundary</i>	72
A.4 Kode Fungsi <i>Update</i> komponen kecepatan	72
A.5 Kode Fungsi menyelesaikan persamaan divergensi	73
A.6 Kode Fungsi menyelesaikan persamaan Poisson	73
A.7 Kode Fungsi Rotasi	74
A.8 Kode Simulasi (Penyelesaian persamaan Navier-Stokes, Menghitung distribusi tekanan dan koefisien hambatan)	74

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu (terus-menerus) bila mendapatkan tegangan geser, walaupun kecilnya tegangan geser tersebut[8]. Tegangan geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan. Zat yang tergolong sebagai fluida yaitu zat cair dan zat gas (dalam kondisi suhu yang sangat tinggi disebut dengan plasma). Perbedaan fluida dengan zat padat yaitu zat padat dapat menahan bentuk apabila mendapatkan tegangan geser dengan deformasi statis. Sedangkan, fluida akan berhenti berubah bentuk jika berada dalam kondisi tegangan geser konstan atau tegangan geser sama dengan nol. Fluida zat cair dan zat gas memiliki lapisan permukaan yang tidak akan bisa bercampur karena terdapat lapisan pemisah yang terjadi akibat gaya tarik menarik antar molekul pada zat cair dimana rapat jenis molekul zat cair lebih rendah dari rapat jenis molekul zat gas. Lapisan pemisah disebut dengan lapisan batas. Konsep lapisan batas memiliki peranan penting dalam mengetahui pengaruh tegangan geser terhadap fluida dan karakteristik fluida.

Penelitian dan terapan mengenai fluida berkembang pesat. Penerapan fluida dimulai dari sistem aliran darah yang bekerja pada tubuh manusia dimana darah dipompa oleh jantung kemudian mengalir keseluruh bagian penting pada tubuh manusia. Sehingga, ditemukan adanya jantung buatan, mesin pernafasan dan sistem analisis kesehatan menggunakan konsep fluida. Selanjutnya, pada perabotan rumah juga menggunakan konsep fluida seperti sistem pompa air, *air conditioner*, lemari es dan peralatan yang lainnya. Selain itu, konsep fluida dengan menggunakan perhitungan numerik dapat menghasilkan peralatan

-peralatan teknik yang canggih seperti pada automobil. Semua komponen yang terdapat pada mesin menggunakan konsep fluida yang berada dalam silinder yaitu injeksi bahan bakar, karbulator, pemompa bahan bakar. Kemudian pada *body* mobil juga menggunakan konsep fluida yaitu analisis *aerodynamic*. Kecenderungan untuk memperkecil gaya hambat yang diterima mobil menjadi pilihan saat membuat desain *body* mobil sehingga diperoleh desain *body* mobil yang cocok terutama untuk mobil balap. Konsep menganalisis gaya hambat juga digunakan pada berbagai bentuk benda mulai dari kotak, lingkaran, elips dan modifikasi bentuk benda yang lainnya.

Gera B., Pavan K. Dan Singh R. K. melakukan penelitian aliran fluida yang melewati objek berbentuk kotak (*square*) dengan bilangan Reynolds rendah yaitu $50 \leq Re \leq 250$ sehingga menghasilkan aliran laminar. Metode numerik yang digunakan yaitu metode volume hingga *staggered grid* pada order dua dan algoritma SIMPLE untuk menyelesaikan komponen kecepatan dan tekanan[5].

R. Mittal dan S. Balachandar melakukan penelitian aliran fluida yang melewati objek berbentuk elips menggunakan persamaan Navier-Stokes dan diselesaikan menggunakan pendekatan skema Fourier-Chebyshev. Kemudian disimulasikan dalam kasus dua dimensi dan tiga dimensi untuk memperoleh hasil yang bagus dan representatif[6].

Sintu Singha dan K. P. Sinhamahapatra melakukan penelitian aliran fluida yang melewati objek berbentuk silinder sirkuler tunggal dengan bilangan Reynolds rendah yaitu $45 \leq Re \leq 250$ dan melakukan percobaan pada jarak antar dinding pembatas yaitu $2 \leq H/D \leq 8$. Metode numerik yang digunakan yaitu metode volume hingga dengan bentuk kisi tak terstruktur menggunakan persamaan Navier-Stokes variabel primitif[4].

Kitagawa dan Ohta dengan melakukan investigasi numerik aliran fluida tiga dimensi di sekitar dua silinder sirkuler yang tersusun secara tandem dengan metode beda hingga menggunakan skema sistem bertipe O. Investigasi dilakukan melalui percobaan pada bilangan Reynolds kritis yaitu 2.2×10^4 yang tetap dan jarak antara dua silinder menggunakan rasio yang bervariasi pada $2 \leq L/D \leq 4$ yaitu 2, 2.5, 3, 3.25, 3.5, 4 [2].

Sarvghad-Moghaddam Hesam dan Nooreddin Navid juga melakukan penelitian terhadap aliran fluida disekitar dua silinder sirkuler yang tersusun secara *side-by-side* dengan metode volume hingga menggunakan pendekatan *difference grid ratio*. Sedangkan percobaannya dilakukan dengan bilangan Reynolds 100 dan 200 untuk aliran laminar, 10^4 untuk aliran turbulen. Kemudian jarak posisi silinder menggunakan rasio yang bervariasi pada $2 \leq L/D \leq 4$ yaitu 1.5, 3, 4 [3].

Pada objek silinder tunggal maupun ganda, tujuan dari penelitian tersebut adalah untuk menyelidiki aliran di sekitar silinder sirkuler di berbagai pengaturan dan kekuatan fluida dinamis yang bekerja pada *external body* silinder. Secara khusus, penelitian dan pemahaman pengetahuan telah diberikan pada aliran sekitar sepasang silinder sirkular. Penelitian tersebut bukan hanya karena memahami aliran di sekitar dua silinder sirkular dasar untuk memahami aliran di sekitar beberapa silinder dalam pengaturan kompleks, tetapi juga karena gangguan aliran antara dua silinder melingkar menyebabkan suatu hambatan dan kerugian secara teknis.

Permasalahan fluida merupakan permasalahan yang dapat diselesaikan dengan cara perhitungan numerik. Perhitungan numerik yaitu suatu perhitungan yang dilakukan dengan cara pendekatan melalui kesalahan yang diperoleh. Semakin kecil kesalahan pendekatan maka semakin bagus pendekatan yang

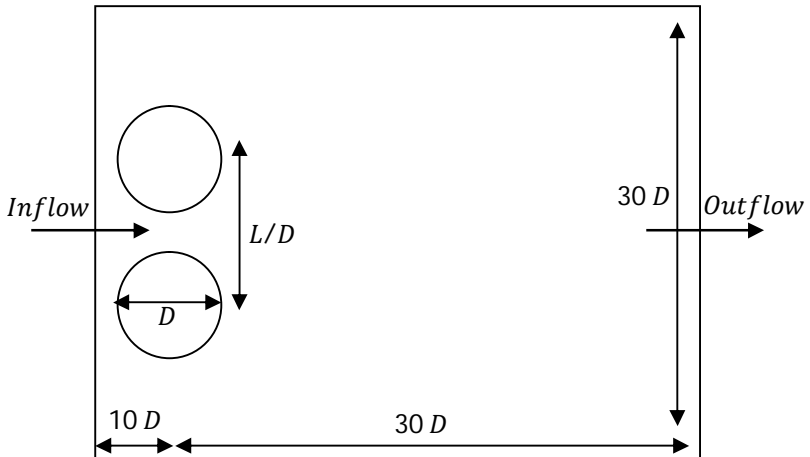
dilakukan. Perhitungan numerik dapat menggunakan beberapa metode yaitu metode beda hingga, metode elemen hingga, metode volume hingga dan metode numerik lainnya. Metode beda hingga adalah salah satu metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan gejala matematik dari suatu gejala fisik. Metode beda hingga juga bisa menyelesaikan persamaan linear ataupun persamaan kuadrat dalam jumlah yang besar. Disisi lain, metode beda hingga lebih mudah dibandingkan dengan metode elemen hingga dan metode volume hingga. Selain lebih mudah, dalam perhitungan komputasi umumnya lebih ringan. Sehingga, untuk mendapatkan hasilnya lebih cepat.

Pada Tugas Akhir ini dilakukan penelitian mengenai aliran fluida dua dimensi di sekitar dua silinder sirkuler yang tersusun secara *side-by-side* untuk mengetahui koefisien hambat yang diterima silinder dengan memperhatikan profil aliran fluida dan distribusi tekanan yang diterima oleh silinder. Pada penelitian ini dua silinder memiliki diameter (D) yang sama dan dalam posisi yang permanen tidak terpengaruh kecepatan aliran sehingga tidak terjadi pergeseran posisi silinder. Penelitian dilakukan pada bilangan Reynolds 100, 500, 1000, 3000 dan 5000 serta pada jarak dengan rasio $1.5 \leq L/D \leq 4$. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh bilangan Reynolds pada aliran yang terdapat dua silinder serta pengaruh jarak terhadap koefisien hambat yang diterima dua silinder. Skema aliran fluida di sekitar dua silinder sirkuler yang tersusun secara *side-by-side* ditampilkan pada Gambar 1.1.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana mengetahui

koefisien hambatan yang diterima oleh silinder dengan memperhatikan aliran fluida di sekitar dua silinder sirkuler *side-by-side* dan distribusi tekanan yang diterima oleh silinder.



Gambar 1.1. Skema aliran fluida di sekitar dua silinder

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Fluida bersifat *incompressible*, *unsteady* dan *viscous*.
2. Menggunakan persamaan Navier-Stokes untuk menyelesaikan permasalahan fluida.
3. Menggunakan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes.
4. Jarak antara silinder menggunakan rasio yang bervariasi pada $1.5 \leq L/D \leq 4$ dan bilangan Reynolds 100, 500, 1000, 3000 dan 5000.
5. Menggunakan *software* MATLAB untuk simulasi permasalahan pada Tugas Akhir ini.

1.4 Tujuan

Tujuan Tugas Akhir ini adalah mengetahui koefisien hambat yang diterima silinder dengan memperhatikan aliran fluida di sekitar dua silinder sirkuler dan distribusi tekanan yang diterima silinder.

1.5 Manfaat

Manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Diperoleh pengetahuan dan keilmuan tentang koefisien hambat yang diterima silinder dengan memperhatikan pengaruh bilangan Reynolds pada profil aliran fluida dan pengaruh jarak terhadap koefisien hambat yang diterima dua silinder sirkuler.
2. Sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan di bidang fluida. Terapan penelitian ini bisa sangat berarti dalam hal konstruksi suatu bangunan atau penempatan suatu objek berupa silinder dimana dengan mengetahui koefisien hambat yang diterima silinder dapat digunakan untuk membuat suatu sistem pengaturan posisi bangunan dalam tata perkotaan atau pengaturan posisi tiang pancang pada pengolahan minyak dan gas bumi *offshore*. Tujuan dari sistem pengaturan posisi tersebut yaitu agar memperoleh koefisien hambat yang lebih kecil sehingga juga memperkecil gaya hambat yang diterima objek. Pada akhirnya, akan lebih menghemat biaya, waktu dan tenaga dalam melakukan pembangunan tersebut.
3. Sebagai literatur penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan tentang penelitian sebelumnya dan landasan teori yang mendukung penelitian yaitu fluida, persamaan Navier-Stokes, algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation*) dan metode beda hingga.

BAB III METODOLOGI

Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara detail mengenai skema aliran fluida di sekitar dua silinder *side-by-side*, penyelesaian persamaan Navier-Stokes menggunakan algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation*) dengan metode beda hingga, simulasi dan percobaan pada bilangan Reynolds dan jarak antar silinder terhadap koefisien hambat dengan memperhatikan aliran fluida dan distribusi tekanan yang diterima silinder.

BAB V PENUTUP

Bab ini merupakan penutup, berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari penyelesaian permasalahan pada bab sebelumnya dan saran yang diberikan bila Tugas Akhir ini dilanjutkan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang akan dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab yaitu Penelitian Sebelumnya, Fluida, Persamaan Navier-Stokes, Algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equation*) dan Metode Beda Hingga.

2.1 Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya digunakan sebagai referensi dan validasi dalam Tugas Akhir ini. Sehingga, hasil yang diperoleh dalam Tugas Akhir tidak sembarangan.

2.1.1 Penelitian Sintu Singha dan K.P. Sinhamahapatra

Sebuah silinder sirkuler disimulasikan secara numerik berdasarkan persamaan Navier-Stokes dengan bilangan Reynolds rendah yaitu $45 \leq Re \leq 250$ dan lebar antar dinding dengan rasio $2 \leq H/D \leq 8$ [4]. Persamaan Navier-Stokes diselesaikan dengan menggunakan volume hingga yang didasarkan pada akurasi order dua. Pendekatan pada dinding sangat mempengaruhi letak titik separasi. Semakin pendek jarak antar dinding, maka diperoleh titik separasi yang semakin pendek. Tidak terjadi pusaran aliran pada $Re = 100$ jika jarak antar dinding kurang dari 1. Saat jarak antar dinding melebihi nilai kritis maka terjadi pusaran pada aliran fluida. Hal ini terjadi pada $H/D = 4$ dengan $Re = 100, 150$. Selanjutnya pada $H/D = 3$ dan Re yang lebih tinggi juga terjadi hal yang sama.

Setelah menganalisis profil aliran pada silinder tunggal, selanjutnya menganalisis pengaruh jarak antar dinding terhadap koefisien hambat yang diterima silinder. Hasilnya adalah dalam

aliran fluida *unsteady* diperoleh semakin tinggi jarak antar dinding maka koefisien hambat akan semakin kecil.

Tabel 2.1. Koefisien hambat hasil penelitian Sintu dan Sinmahapatra

H/D	Re	Cd
8	100	1.381
	200	1.294

2.1.2 Penelitian Sarvghad-Moghaddam Hesam dan Nooredin Navid

Pada penelitiannya aliran fluida *2D unsteady, viscous, incompressible* disimulasikan menggunakan metode volume hingga tipe *staggered grid*. Dalam simulasinya menampilkan perbedaan jarak dengan rasio $1.5 \leq T/D \leq 4$ dan bilangan Reynolds 100, 200 untuk aliran laminar dan 10^4 untuk aliran turbulen, dimana T adalah jarak dan D adalah diameter silinder[3]. Distribusi tekanan, kecepatan bersama dengan pola *streamline* dan gaya hidrodinamik terhadap waktu dihitung dan dianalisis berdasarkan perbedaan jarak antar silinder. Sehingga, akan diketahui pengaruh bilangan Reynolds pada pola aliran fluida dengan memperhatikan jarak antar kedua silinder.

Pada simulasi menggunakan persamaan beda dengan model matematika sebagai berikut :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2)$$

dimana u adalah komponen kecepatan, p adalah tekanan, ν adalah viskositas kinematik dari fluida dan ρ adalah densitas fluida. Untuk memperoleh aliran turbulen maka menggunakan model $k - \varepsilon$. Kemudian, pada aliran masuk menggunakan batas Dirichlet dan aliran keluar menggunakan batas Newmann.

Selanjutnya, menghitung koefisien hambatan menggunakan rumus sebagai berikut ini :

$$C_d = \frac{F_d}{0.5\rho u^2 D} \quad (2.3)$$

dimana F_d adalah gaya hambatan, D adalah diameter silinder.

Beberapa hasil penelitiannya yaitu

1. Pada $Re = 100$ dan $T = 1.5 D$ pola aliran di belakang silinder tidak stabil. $T = 3D, 4D$ pola aliran *flip-flop* berkurang seiring bertambahnya jarak antar silinder.
2. Pada $Re = 200$ memiliki hasil pola aliran yang hampir sama saat $Re = 100$. Pada jarak $T = 3D, 4D$ dan semakin jauh jarak antar silinder rata-rata koefisien hambatan menurun.
3. Pada $Re = 10^4$ terjadi aliran yang tidak simetris. Semakin lebar jarak antar silinder diperoleh pola aliran yang semakin simetris.
4. Diperoleh koefisien hambatan pada pengaturan jarak dan bilangan Reynolds pada Tabel 2.2

Tabel 2.2. Koefisien hambatan hasil penelitian Sarvghad dan Nooredin

T/D	Silinder	$Re = 100$	$Re = 200$	$Re = 10^4$
1.5	S. Atas	1.54	1.31	1.37
	S. Bawah	1.52	1.30	1.37
3	S. Atas	1.49	1.42	1.24
	S. Bawah	1.49	1.41	1.24
4	S. Atas	1.47	1.38	1.12
	S. Bawah	1.47	1.38	1.12

2.2 Fluida

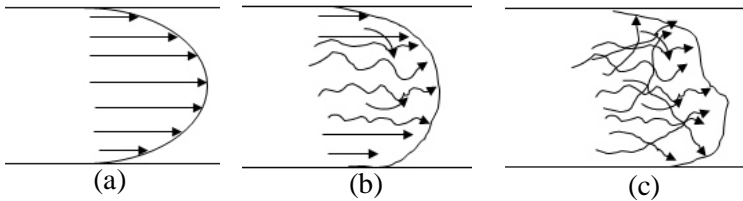
Dalam ilmu fluida terdapat bermacam-macam faktor yang mempengaruhi sistem kerja fluida. Selain itu, penentuan ciri-ciri

fluida juga menjadi hal yang perlu diperhatikan agar memperoleh hasil penelitian yang diinginkan.

2.2.1 Karakteristik Aliran Fluida

Aliran fluida dapat dikategorikan menjadi tiga jenis aliran yaitu :[8]

1. Aliran laminar, turbulen dan transisi



Gambar 2.1. Jenis-jenis aliran fluida: (a) Aliran Laminar, (b) Aliran Transisi, (c) Aliran Turbulen. [11]

Aliran laminar adalah aliran yang bergerak dalam lapisan-lapisan secara lancar dengan kecepatan yang sama, sehingga tidak terjadi fluktuasi atau ketidakberaturan gerak antara lapisan satu dengan yang lain, tetapi saling tukar menukar momentum secara molekular saja.

Aliran turbulen yaitu aliran yang bergerak secara tidak teratur karena mengalami percampuran serta perputaran partikel pada lapisan-lapisan, sehingga menyebabkan saling tukar momentum dari lapisan satu dengan yang lain dalam jumlah besar.

Sedangkan aliran transisi merupakan aliran peralihan dari aliran laminar ke aliran turbulen. Antara aliran laminar, turbulen dan transisi dapat diidentifikasi menggunakan bilangan Reynolds.

2. Aliran *incompressible* dan *compressible*

Aliran *incompressible* atau aliran tak termampatkan yaitu aliran dimana rapat massa fluidanya tidak berubah karena pengaruh tekanan dan temperatur. Sedangkan aliran *compressible*

atau aliran termampatkan yaitu aliran dimana rapat massa fluidanya bisa berubah karena pengaruh tekanan dan suhu.

3. Aliran *steady* dan *unsteady*

Aliran *steady* (tunak atau permanen) yaitu suatu aliran dimana komponen aliran (kecepatan, tekanan, kerapatan dan debit fluida) tidak berubah terhadap waktu. Sehingga, walaupun terjadi perubahan terhadap komponen tersebut, akan tetapi tetap konstan terhadap waktu. Sedangkan *unsteady* (tak tunak atau tak permanen) yaitu komponen aliran dapat berubah terhadap waktu.

2.2.2 Viskositas

Viskositas fluida merupakan ukuran ketahanan sebuah fluida terhadap deformasi atau perubahan bentuk[8]. Viskositas dipengaruhi oleh temperatur, tekanan, kohesi dan laju perpindahan momentum molekularnya. Viskositas zat cair dan zat gas berbeda, saat viskositas gas meningkat terhadap suhu tetapi viskositas cairan berkurang dengan meningkatnya suhu. Selain itu, jika dilihat dari pengaruh kohesi dimana cairan dengan molekul-molekul yang lebih rapat daripada gas maka cairan akan mempunyai gaya-gaya kohesi yang lebih besar daripada gas. Dengan demikian, saat kohesi pada fluida berkurang, sebagian besar tahananannya juga akan berubah terhadap tegangan geser karena perpindahan momentum molekular.

2.2.3 Rapat Jenis

Density atau rapat jenis suatu zat adalah ukuran untuk konsentrasi zat tersebut dan dinyatakan dalam massa persatuan volume[12].

$$\rho = m/V$$

Rapat jenis suatu zat dapat dipengaruhi suhu dan tekanan. Pada sebagian besar gas, rapat jenisnya setara dengan suhu dan berkebalikan dengan tekanan. Pada zat cair semakin tinggi suhu

zat cair maka semakin tinggi volume zat cair. Maka, rapat jenis akan berkurang.

2.2.4 Bilangan Reynolds

Bilangan Reynolds merupakan bilangan tak berdimensi yang dapat membedakan suatu aliran itu dinamakan aliran laminar, transisi atau turbulen[13]. Sifat ini ditentukan dengan menghitung rasio antara gaya inersia terhadap gaya *viscous*. Hubungan ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$Re = \frac{ul\rho}{\mu}$$

dimana :

u adalah kecepatan rata-rata fluida yang mengalir (m/s)

l adalah panjang karakteristik (m)

ρ adalah massa jenis fluida (kg/m^3)

μ adalah viskositas ($kg/m.s$)

Dilihat dari kecepatan aliran, Osborne Reynolds berpendapat bahwa dikategorikan aliran laminar bila aliran tersebut mempunyai bilangan Reynolds kurang dari 2300, aliran transisi mempunyai bilangan Reynolds antara 2300 sampai 4000 dan aliran turbulen mempunyai bilangan Reynolds lebih dari 4000.

2.2.5 Koefisien Hambat

Koefisien hambat merupakan bagian penting dalam ilmu fluida terutama dalam hal *aerodynamic*. Semakin akurat nilai koefisien hambat akan semakin bagus dalam perancangan desain *aerodynamic*. Koefisien hambat dapat diperoleh menggunakan metode sebagai berikut : [9]

1. Drag Force by Direct Weighting Method

Metode ini menggunakan gaya hambat, tekanan seluruh-nya, tekanan statis, tekanan dinamis untuk memperoleh koefisien hambat.

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (2.4)$$

dimana C_d adalah koefisien hambat, F_d adalah gaya hambat, ρ adalah densitas fluida dan U adalah kecepatan fluida.

2. Drag Coefficient by Pressure Distribution Method

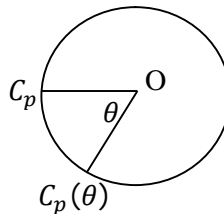
Metode ini menggunakan nilai distribusi tekanan pada permukaan, tekanan statis, tekanan seluruhnya dan koefisien tekanan.

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (2.5)$$

dimana C_p adalah koefisien tekanan, p adalah tekanan permukaan, p_0 adalah tekanan statis, ρ adalah densitas fluida dan U adalah kecepatan fluida. Kemudian, metode koefisien hambat dengan menggunakan distribusi tekanan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$C_d = 0.5 \int_0^{2\pi} C_p(\theta) \cos \theta d\theta \quad (2.6)$$

dimana, θ adalah sudut dari pusat objek terhadap nilai distribusi tekanan.



Gambar 2.2. Distribusi tekanan $C_p(\theta)$

2.3 Persamaan Navier-Stokes

Persamaan Navier-Stokes adalah serangkaian persamaan yang menjelaskan pergerakan fluida dengan memperhatikan gaya-

gaya yang bekerja pada fluida termasuk tegangan geser yang dibangkitkan oleh gerakan-gerakan fluida[7]. Dalam persamaan ini menyatakan bahwa perubahan dalam momentum partikel-partikel fluida bergantung kepada gaya *viscous* tekanan internal dan gaya *viscous* tekanan eksternal yang bekerja pada fluida. Selain itu, persamaan Navier-Stokes juga menjelaskan pergerakan fluida yang dipengaruhi terhadap kecepatan.

Persamaan Navier-Stokes dibangun dari persamaan momentum dan massa. Berikut ini adalah bentuk persamaan Navier-Stokes untuk fluida *incompressible*, *unsteady* dan *viscous* yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot uu + \nabla P = \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2.7a)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2.7b)$$

dimana :

u adalah vektor kecepatan berupa (x, y)

P adalah tekanan

Re adalah bilangan Reynolds

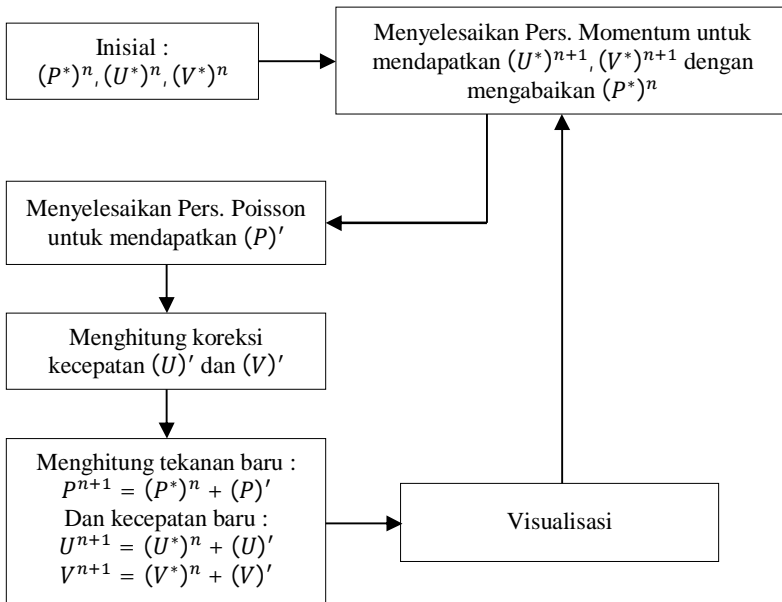
2.4 Algoritma SIMPLE (*Semi Implicit for Pressure-Linked Equation*)

Algoritma SIMPLE merupakan suatu algoritma yang sering digunakan dalam permasalahan komputasi dinamika fluida untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes[10]. Metode ini sangat bagus pada *grid* yang kasar namun kurang bagus untuk mencapai konvergen asimtotik. Oleh karena itu, metode ini efektif untuk menghitung penyelesaian dari permasalahan yang kompleks tetapi kurang efektif untuk mendapatkan penyelesaian pada kondisi bersifat kontinu.

Metode ini dibangun pada prosedur *time-step* sehingga tidak efisien pada permasalahan yang menggunakan prosedur

time-depend yang mempunyai titik *grid* kontinu yang sangat banyak. Sehingga, metode SIMPLE ini mengalami revisi agar bisa menyelesaikan permasalahan yang menggunakan *grid* kontinu dan banyak yaitu disebut dengan SIMPLE-Revised atau lebih dikenal dengan istilah SIMPLER.

Berikut adalah algoritma SIMPLE yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes :



Gambar 2.3. Algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked-Equation*)[10].

2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan metode numerik yang digunakan untuk mendekati penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan persamaan beda hingga sebagai pengganti dalam bentuk turunan[14]. Metode beda hingga diterapkan pada

bidang ilmu teknik seperti permasalahan transfer panas, permasalahan mekanika fluida dan permasalahan lainnya dalam bentuk dua dimensi dengan batasan absis.

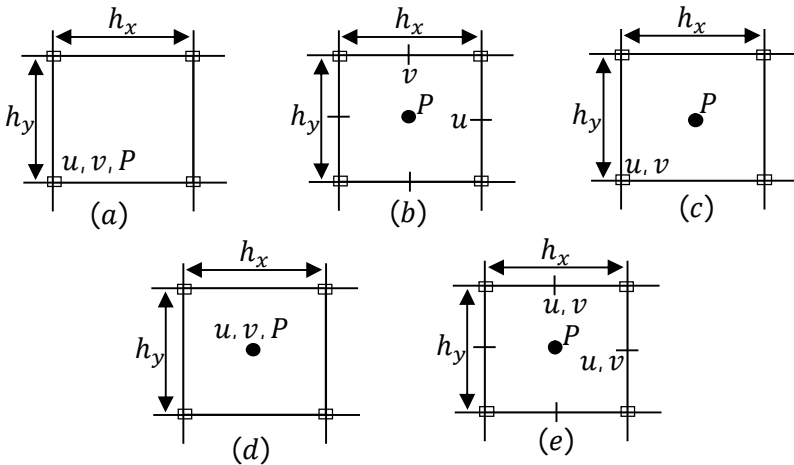
Permasalahan mekanika fluida sangat kompleks, sehingga dalam menyelesaikannya menggunakan perhitungan numerik dalam jumlah besar. Jika perhitungan numeriknya dalam jumlah besar, maka akan lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan teknik komputasi. Dalam perhitungan komputasi metode beda hingga lebih mudah karena keteraturan *grid* sehingga bisa membuat penyusunan algoritma dan *source code* yang mudah dan cepat.

2.5.1 Langkah-langkah Metode Beda Hingga

Persamaan differensial yang diselesaikan dengan metode numerik membutuhkan langkah-langkah sistematis sehingga memperoleh hasil yang benar dan sesuai dengan metode yang digunakan. Berikut ini adalah langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan differensial menggunakan metode beda hingga :

1. Diskritisasi

Diskritisasi yaitu proses yang digunakan untuk mendapatkan suatu penyelesaian pendekatan dari persamaan differensial dengan cara membagi keseluruhan objek menjadi bagian-bagian kecil yang disebut dengan *grid*[14]. Ada beberapa macam *grid* yang digunakan dalam metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan dua dimensi yaitu *grid* bentuk segitiga, *grid* bentuk segi empat atau menggunakan kombinasi *grid* segitiga dan *grid* segi empat. Pada metode beda hingga bentuk *grid* yang digunakan adalah segi empat. Kemudian dalam menyelesaikan persamaan Navier-Stokes terdapat beberapa tipe *grid* yang ditampilkan pada Gambar 2.4.



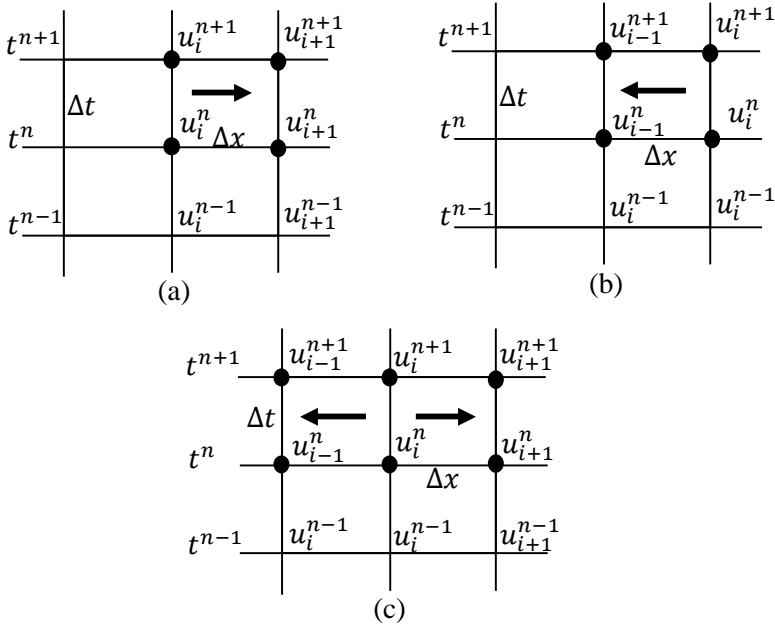
Gambar 2.4. Tipe *grid* : (a) *Natural Grid*, (b) *Staggered Grid*, (c) *Partially Staggered Grid*, (d) *Cell-Centered Unstaggered Grid*, (e) *Staggered With Multiple Momentum Equations Grid* [15]

Tipe *staggered grid* yaitu setiap variabel terletak pada posisi yang berbeda sehingga untuk perhitungan masing-masing variabelnya juga berbeda. Komponen P berada di pusat *grid*, komponen kecepatan u terletak pada sisi kolom karena berjalan searah dengan sumbu- x sedangkan komponen kecepatan v terletak pada sisi baris karena berjalan searah sumbu- y . Tipe *grid* ini pertama kali digunakan untuk membangun metode MAC (*Marker and Cell*). Kemudian digunakan juga untuk membantu menyelesaikan persamaan Navier-Stokes.

2. Mensubstitusikan turunan kedalam sistem persamaan differensial dengan metode beda hingga.

Setelah menentukan tipe *grid* yang digunakan dan membangun *grid* ke semua objek selanjutnya membuat skema numerik pada *grid* tersebut yaitu dengan cara mensubstitusikan turunan menggunakan persamaan beda. Dalam persamaan beda

menggunakan ekspansi Taylor, terdapat tiga skema yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial secara numerik yaitu



Gambar 2.5. Skema beda hingga terhadap ruang dan waktu. (a) Skema beda mundur, (b) Skema beda maju, (c) Skema beda tengah

a) Skema Maju

Pada skema maju, titik u_i dihubungkan dengan titik depannya yaitu u_{i+1} . Sehingga dengan deret Taylor diperoleh skema maju sebagai berikut :

Skema maju ruang :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (2.8a)$$

Skema maju waktu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.8b)$$

b) Skema Mundur

Pada skema mundur, titik u_i dihubungkan dengan titik belakangnya yaitu u_{i-1} . Sehingga dengan deret Taylor diperoleh skema mundur sebagai berikut :

Skema mundur ruang :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.9a)$$

Skema mundur waktu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.9b)$$

c) Skema Tengah

Dengan mengkombinasikan dua pendekatan pada skema maju dan skema mundur diperoleh skema tengah yaitu sebagai berikut :

Skema tengah ruang :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.10a)$$

Skema tengah waktu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.10b)$$

Skema yang dijelaskan diatas merupakan beda hingga orde satu dengan galat (Δx) . Selain itu, terdapat beberapa beda hingga dengan nilai galat yang lebih bagus yaitu

(a) Beda hingga order satu dengan besarnya galat

- i. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$ dengan galat (Δx)
- ii. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$ dengan galat (Δx^2)

$$\begin{aligned} \text{iii. } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-u_{i+2}^n + 4u_{i+1}^n - 3u_i^n}{2\Delta x} \text{ dengan galat } (\Delta x^2) \\ \text{iv. } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-u_{i+2}^n + 6u_{i+1}^n - 3u_i^n - 2u_{i-1}^n}{6\Delta x} \text{ dengan galat } (\Delta x^3) \\ \text{v. } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-u_{i+2}^n + 8u_{i+1}^n - 8u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{12\Delta x} \text{ dengan galat } (\Delta x^4) \end{aligned}$$

(b) Beda Hingga order dua dengan besarnya galat

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n}{\Delta x^2} \text{ dengan galat } (\Delta x) \\ \text{ii. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \text{ dengan galat } (\Delta x^2) \\ \text{iii. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{-u_{i+2}^n + 16u_{i+1}^n - 30u_i^n + 16u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{12\Delta x^2} \text{ dengan galat } (\Delta x^4) \end{aligned}$$

3. Mendapatkan persamaan linear/non-linear dari persamaan differensial

Setelah turunan dengan metode beda hingga disubstitusikan, selanjutnya menyusun persamaan differensial tersebut dalam bentuk persamaan linear atau non-linear atau melakukan pengelompokan berdasarkan waktu. Artinya komponen pada waktu ke- n dikelompokkan dan dipisah dengan komponen pada waktu ke- $n + 1$. Hal ini bisa dilakukan dengan cara memindahkan komponen waktu ke- n ke ruas sebelah kiri, sedangkan komponen waktu ke- $n + 1$ sebelah kanan atau sebaliknya. Sehingga, diperoleh persamaan linear atau bisa juga dalam bentuk persamaan non-linear.

4. Menyelesaikan sistem persamaan linear/non-linear

Setelah mendapatkan sistem persamaan linear atau non-linear, selanjutnya menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan mengimplementasikan perhitungan komputasi karena persamaan tersebut dalam bentuk numerik dengan iterasi yang cukup besar. Jika diselesaikan dengan perhitungan manual akan terjadi

kesulitan dan kemungkinan besar terjadinya eror dalam perhitungan. Oleh karena itu, dilakukan dengan perhitungan komputasi sampai mendapatkan solusi yang diinginkan sesuai dengan permasalahan.

5. Menganalisis eror, antara analitik dengan numerik

Hasil penyelesaian sistem persamaan tersebut merupakan penyelesaian secara numerik karena langkah penyelesaiannya juga menggunakan numerik. Oleh karena itu, perlu dilakukan analisis eror hasil perhitungan numerik yang dibandingkan dengan hasil perhitungan analitik. Semakin kecil eror yang dihasilkan pada perhitungan numerik, maka hasilnya akan semakin bagus.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODOLOGI

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan Tugas Akhir adalah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

Pada tahap ini mengumpulkan referensi yang didalamnya terdapat teori-teori dasar yang mendukung pembahasan masalah. Selanjutnya, akan dipelajari lebih lanjut tentang penyelesaian persamaan Navier-Stokes menggunakan algoritma SIMPLE dengan metode beda hingga. Selain itu, mempelajari penelitian-penelitian sebelumnya sebagai referensi pertimbangan ketika melakukan simulasi dan melakukan penarikan kesimpulan.

2. Penyelesaian Numerik

Pada tahap ini persamaan Navier-Stokes untuk fluida *incompressible*, *unsteady* dan *viscous* diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga. Selanjutnya, menggunakan algoritma SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked-Equation*) untuk memperoleh komponen kecepatan dan komponen tekanan. Berikut ini adalah tahapan yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes sampai memperoleh komponen kecepatan dan komponen tekanan :

- a) Penentuan tipe *grid* yang digunakan untuk menentukan posisi komponen yang terdapat pada persamaan Navier-Stokes.

- b) Menyelesaikan persamaan momentum dengan mengabaikan komponen tekanan. Sehingga, akan diperoleh komponen kecepatan sementara. persamaan momentum diselesaikan menggunakan beda hingga galat orde tiga dan galat orde dua.
- c) Melakukan pemisahan persamaan momentum yaitu persamaan komponen kecepatan dan persamaan komponen tekanan. Selanjutnya, persamaan komponen tekanan bersama dengan persamaan kontinuitas digunakan untuk membangun persamaan Poisson. Sehingga, dengan menyelesaikan persamaan Poisson diperoleh komponen tekanan sementara. Persamaan Poisson diselesaikan menggunakan beda hingga skema tengah dengan galat orde dua.
- d) Mempercepat konvergensi dengan menggunakan metode SOR (*Successive Over Relaxation*) dengan toleransi 10^{-7} dan $\omega > 1$. Komponen tekanan sementara akan dihitung ulang sehingga memenuhi kondisi eror yaitu $(|\text{tekanan ke } n - \text{tekanan ke } n - 1|) > \text{toleransi}$.
- e) Melakukan koreksi komponen kecepatan menggunakan nilai komponen tekanan setelah memenuhi kondisi SOR. Hal ini dapat dilakukan dengan cara melihat hubungan antara komponen kecepatan pada sumbu- x dan sumbu- y dengan komponen tekanan. Koreksi nilai dilakukan menggunakan beda hingga skema maju galat orde satu.
- f) Melakukan update komponen kecepatan dengan cara menjumlahkan komponen kecepatan awal ditambah dengan komponen kecepatan setelah dikoreksi. Pada komponen tekanan juga diperbarui dengan cara menjumlahkan komponen tekanan awal ditambah dengan komponen tekanan setelah memenuhi kondisi SOR.

3. Simulasi

Pada tahap ini dilakukan simulasi untuk memperoleh nilai komponen kecepatan dan komponen tekanan dari penyelesaian persamaan Navier-Stokes dengan variasi bilangan Reynolds dan jarak antara dua silinder. Selanjutnya, nilai komponen kecepatan divisualisasikan untuk memperoleh profil aliran fluida, sedangkan nilai komponen tekanan digunakan untuk memperoleh nilai distribusi tekanan dan koefisien hambat yang diterima silinder.

Distribusi tekanan diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- a) Menentukan titik pusat silinder (a, b) dan titik 0° dari dinding silinder (x, y) .
- b) Membuat fungsi rotasi untuk menentukan titik-titik disekeliling silinder.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dimana θ adalah sudut rotasi yaitu $i \frac{\pi}{18}$, $i = 1, 2, 3, \dots 36$.

- c) Mengambil nilai tekanan pada titik-titik yang telah diperoleh dari fungsi rotasi.
- d) Menyimpan nilai tekanan tersebut sehingga diperoleh distribusi tekanan pada dinding silinder.

Selanjutnya, koefisien hambat diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan (2.6) menggunakan hampiran numerik untuk luas. Sehingga, Persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai berikut :

$$C_d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_p(\theta_k^*) \cos \theta_k^* \Delta x \quad (3.1)$$

dimana C_d adalah koefisien hambat, C_p adalah distribusi tekanan dan θ_k^* adalah letak titik-titik dari distribusi tekanan.

Langkah-langkah menyelesaikan Persamaan (3.1) adalah sebagai berikut :

- a) Menentukan jumlah titik pada dinding silinder yaitu $n = 36$.
- b) Menentukan selisih antar titik yaitu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sehingga, diperoleh $\Delta x = \pi/18$.
- c) Menggunakan hampiran ujung kanan untuk memperoleh pendekatan titik pada θ_k^* .

$$\theta_k^* = k \frac{\pi}{18}$$

- d) Mensubstitusikan (a), (b), (c) ke dalam Persamaan (3.1) sehingga diperoleh koefisien hambat pada dinding silinder.

4. Membuat Persamaan Koefisien Hambat ($C_d(L/D)$)

Pada tahap ini dilakukan perhitungan sebelas data koefisien hambat terhadap jarak (L/D) pada bilangan Reynolds yang berbeda-beda. Selanjutnya, mengambil empat data yang representatif dari sebelas data tersebut untuk mencari persamaan koefisien hambat. Persamaan koefisien hambat tersebut berupa persamaan polinomial tingkat tiga dengan empat variabel. Selanjutnya, hasil nilai koefisien hambat berdasarkan persamaan koefisien hambat dibandingkan dengan nilai koefisien hambat berdasarkan hasil simulasi. Hal ini dilakukan untuk mengetahui eror dari persamaan koefisien hambat yang telah diperoleh.

5. Kesimpulan

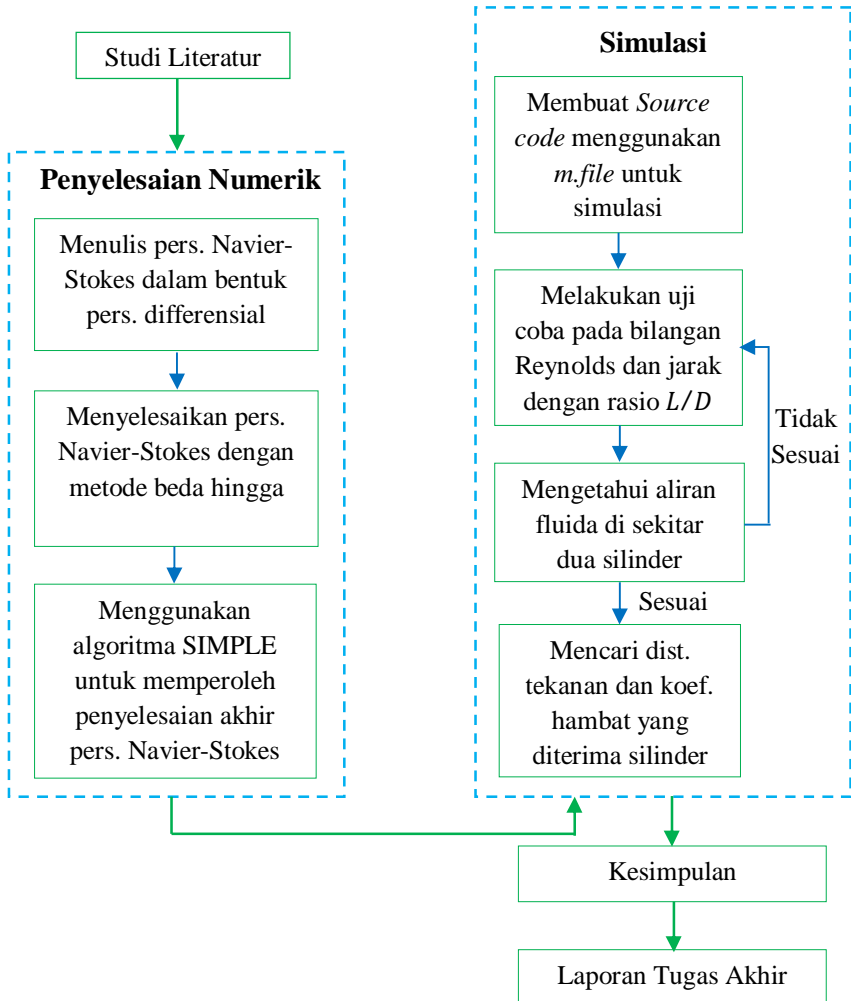
Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil pembahasan dan simulasi serta disampaikan saran untuk perbaikan penelitian selanjutnya.

6. Pembuatan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap akhir ini dilakukan penulisan hasil yang telah diperoleh selama melakukan penelitian.

3.2 Diagram Alur Metode Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini dapat ditampilkan dalam diagram alur penelitian pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Diagram alur metode penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas secara detail mengenai penyelesaian numerik, perancangan simulasi dan analisis penyelesaian. Analisis penyelesaian dilakukan dengan menganalisis hasil simulasi aliran fluida dengan perubahan bilangan Reynolds 100, 500, 1000, 3000, 5000 dan jarak antara silinder $1.5 \leq L/D \leq 4$.

4.1 Penyelesaian Numerik

Persamaan Navier-Stokes akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga. Tahapan untuk mencapai penyelesaian persamaan Navier-Stokes secara numerik adalah sebagai berikut :

4.1.1 Diskritisasi

Diskritisasi adalah proses yang digunakan untuk mendapatkan suatu penyelesaian pendekatan dari persamaan differensial dengan cara membagi keseluruhan objek menjadi bagian-bagian kecil yang disebut dengan *grid*. Pada tugas akhir ini, skema pada Gambar 1.1. didiskritisasi dari ukuran $40D \times 30D$ setara dengan 400×300 *grid* dengan ukuran *grid* seluruhnya sama besar/*Uniform Grid*. Selanjutnya, akan menentukan tipe *grid* yang akan digunakan karena untuk menyelesaikan permasalahan dengan skema numerik posisi setiap komponen perlu diperhatikan. Tipe *grid* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes pada permasalahan ini adalah tipe *staggered grid*.

4.1.2 Strategi Penyelesaian

Diberikan persamaan Navier-Stokes untuk fluida *incompressible*, *unsteady* dan *viscous* pada Persamaan (4.1. a) dan Persamaan (4.1. b)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot uu + \nabla P = \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (4.1a)$$

$$\nabla u = 0 \quad (4.1b)$$

dimana :

u adalah vektor kecepatan berupa (x, y)

P adalah tekanan

Re adalah bilangan Reynolds

Untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes dengan skema numerik, maka persamaan ditulis ulang menjadi persamaan differensial yaitu

1. Persamaan Momentum

Momentum- x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4.2a)$$

Momentum- y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (4.2b)$$

2. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Kemudian persamaan differensial tersebut diselesaikan dengan mengikuti alur algoritma SIMPLE. Berikut ini penyelesaian dengan menggunakan algoritma SIMPLE :

Langkah 1 yaitu inisial untuk setiap komponen.

Menentukan kondisi awal untuk komponen kecepatan dan komponen tekanan. Terdapat dua komponen kecepatan yaitu komponen kecepatan- u yaitu sejajar dengan sumbu- x dan komponen kecepatan- v yaitu sejajar dengan sumbu- y . Jumlah kedua komponen kecepatan tersebut sama dengan satu dengan rincian sebagai berikut :

$$(u_n^*) = 1$$

$$(v_n^*) = 0$$

sedangkan untuk komponen tekanan diasumsikan $(P_n^*) = 0$.

Langkah 2 yaitu mencari nilai $(u_{n+1}^*), (v_{n+1}^*)$ dengan mengabaikan nilai (P_n^*) .

Menggunakan Persamaan (4.2a) dan Persamaan (4.2b) untuk memperoleh nilai $(u_{n+1}^*), (v_{n+1}^*)$ dimana persamaan momentum-x untuk penyelesaian (u_{n+1}^*) dan persamaan momentum-y untuk penyelesaian (v_{n+1}^*) . Berikut ini adalah penjelasan detail perhitungan persamaan momentum :

Momentum-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Dengan mengabaikan nilai (p^*) , sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4.4)$$

Selanjutnya mensubstitusikan turunan beda hingga kedalam Persamaan (4.4) sehingga mendapatkan sistem persamaan linier.

$$\begin{aligned}
& \frac{(u_{n+1})_{i,j} - (u_n)_{i,j}}{\Delta t} = \\
& - (u_n)_{i,j} \left(\frac{-(u_n)_{i+2,j} + 6(u_n)_{i+1,j} - 3(u_n)_{i,j} - (u_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \\
& - (v_n)_{i,j} \left(\frac{-(u_n)_{i,j+2} + 6(u_n)_{i,j+1} - 3(u_n)_{i,j} - (u_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
& + \frac{1}{Re} \left(\left(\frac{(u_n)_{i+1,j} - 2(u_n)_{i,j} + (u_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(u_n)_{i,j+1} - 2(u_n)_{i,j} + (u_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right) \\
& (u_{n+1}^*)_{i,j} = (u_n)_{i,j} + \\
& \Delta t \left\{ - (u_n)_{i,j} \left(\frac{-(u_n)_{i+2,j} + 6(u_n)_{i+1,j} - 3(u_n)_{i,j} - (u_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \right. \\
& - (v_n)_{i,j} \left(\frac{-(u_n)_{i,j+2} + 6(u_n)_{i,j+1} - 3(u_n)_{i,j} - (u_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
& + \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{(u_n)_{i+1,j} - 2(u_n)_{i,j} + (u_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{(u_n)_{i,j+1} - 2(u_n)_{i,j} + (u_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \right\} \tag{4.5a}
\end{aligned}$$

Momentum-y

Dengan cara yang sama akan menyelesaikan persamaan momentum-y.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

Dengan mengabaikan nilai (P_n^*) , sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

Selanjutnya mensubstitusikan turunan beda hingga kedalam persamaan differensial diatas sehingga mendapatkan sistem persamaan linier.

$$\begin{aligned}
&\frac{(v_{n+1})_{i,j} - (v_n)_{i,j}}{\Delta t} \\
&= -(u_n)_{i,j} \left(\frac{-(v_n)_{i+2,j} + 6(v_n)_{i+1,j} - 3(v_n)_{i,j} - (v_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \\
&- (v_n)_{i,j} \left(\frac{-(v_n)_{i,j+2} + 6(v_n)_{i,j+1} - 3(v_n)_{i,j} - (v_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
&+ \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{(v_n)_{i+1,j} - 2(v_n)_{i,j} + (v_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \right. \\
&\left. + \left(\frac{(v_n)_{i,j+1} - 2(v_n)_{i,j} + (v_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_{n+1}^*)_{i,j} &= (v_n)_{i,j} + \Delta t \\
&\left\{ - (u_n)_{i,j} \left(\frac{-(v_n)_{i+2,j} + 6(v_n)_{i+1,j} - 3(v_n)_{i,j} - (v_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \right. \\
&- (v_n)_{i,j} \left(\frac{-(v_n)_{i,j+2} + 6(v_n)_{i,j+1} - 3(v_n)_{i,j} - (v_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
&+ \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{(v_n)_{i+1,j} - 2(v_n)_{i,j} + (v_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \right. \\
&\left. \left. + \left(\frac{(v_n)_{i,j+1} - 2(v_n)_{i,j} + (v_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \right\} \quad (4.5a)
\end{aligned}$$

Langkah 3 yaitu menyelesaikan tekanan sementara menggunakan persamaan Poisson. Persamaan Poisson dapat diperoleh dengan memperhatikan kembali persamaan momentum dan persamaan kontinuitas. Menyesuaikan kondisi ke-(n+1) pada kecepatan sementara, Persamaan (4.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\left(\frac{(u_{n+1})_{i+1,j} - (u_{n+1})_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{(v_{n+1})_{i,j+1} - (v_{n+1})_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) = 0$$

Kemudian tulis kembali menjadi persamaan:

$$\nabla(u_{n+1})_{i,j} = 0 \quad (4.6)$$

Persamaan momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\left(-\frac{\partial uu}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} \right)}_A - \frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]}_F$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{\left(-\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial vv}{\partial y} \right)}_A - \frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]}_F$$

Persamaan momentum-x dan momentum-y dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$u_t = A - \nabla P + F \quad (4.7)$$

Kemudian Persamaan (4.7) dipisah menjadi dua persamaan yaitu

$$u_t = A + F \quad (4.7a)$$

Dan

$$u_t = -\nabla P \quad (4.7b)$$

Persamaan (4.7b) ditulis ulang dengan beda hingga sebagai berikut :

$$\frac{(u_{n+1})_{i,j} - (u_n)_{i,j}}{\Delta t} = -\nabla P$$

Selanjutnya kedua sisi diberikan operator ∇ , sehingga diperoleh

$$\frac{\nabla(u_{n+1})_{i,j} - \nabla(u_n)_{i,j}}{\Delta t} = -\nabla^2 P \quad (4.8)$$

Mensubstitusikan Persamaan (4.6) ke Persamaan (4.8) memperoleh persamaan Poisson

$$-\frac{\nabla(u_n)_{i,j}}{\Delta t} = -\nabla^2 P$$

$$\nabla^2 P = \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} \quad (4.9)$$

Menyelesaikan Persamaan (4.9) untuk memperoleh nilai komponen tekanan. Pada ruas kiri yaitu $\nabla(u_n)_{i,j}$ disebut persamaan divergensi dengan nilai komponen kecepatan sementara. Kemudian persamaan divergensi ditulis menggunakan beda hingga.

$$\nabla(u_n)_{i,j} = \left(\frac{(u_{n+1})_{i+1,j} - (u_{n+1})_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{(v_{n+1})_{i,j+1} - (v_{n+1})_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (4.10)$$

Menulis ulang komponen tekanan menggunakan beda hingga order dua.

$$\nabla^2 P = \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} - 2(P_n)_{i,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} - 2(P_n)_{i,j} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (4.11)$$

Setelah itu, mensubstitusikan Persamaan (4.10) dan Persamaan (4.11) kedalam Persamaan (4.9). Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} &= \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} - 2(P_n)_{i,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} - 2(P_n)_{i,j} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} &= \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{-2(P_n)_{i,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{-2(P_n)_{i,j}}{(\Delta y)^2} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} &= \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{-2(\Delta y)^2(P_n)_{i,j} - 2(\Delta x)^2(P_n)_{i,j}}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} &= \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{2(P_n)_{i,j}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_n)_{i,j} & \left(\frac{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} \right) \\
& = \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) \\
& \quad + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} \\
(P_n)_{i,j} & = \left[\left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} \right] \left[\left(\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh nilai tekanan sementara yaitu

$$\begin{aligned}
& (P_n)_{i,j} \\
& = \left[\left(\frac{(P_n)_{i+1,j} + (P_n)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} + (P_n)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta t} \nabla(u_n)_{i,j} \right] \left[\left(\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \right) \right] \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, agar Persamaan (4.12) lebih cepat untuk mencapai konvergensi maka dapat dilakukan dengan metode SOR (*Successive Over Relaxation*).

$$(P_n)_{i,j} = (1 - \omega)((P_{n-1})_{i,j}) + \omega(P_n)_{i,j}$$

Dimana ω adalah parameter relaksasi. Karena menggunakan over relaksasi maka $\omega > 1$.

Kemudian membuat kondisi dimana nilai tekanan berada dibawah nilai maksimum toleransi.

Toleransi = 10^{-7}

Maksimum absolut dari tekanan = $|(P_n)_{i,j} - (P_{n-1})_{i,j}|$

Kondisi : jika $|(P_n)_{i,j} - (P_{n-1})_{i,j}| < 10^{-7}$

STOP

Jika tidak memenuhi

$$(P_n)_{i,j} = (P_{n-1})_{i,j}$$

Sehingga diperoleh nilai tekanan baru yaitu $(P_n)_{i,j} = (P_{n-1})_{i,j}$ yang merupakan hasil dari metode SOR.

Langkah 4 yaitu koreksi komponen kecepatan dengan menggunakan komponen tekanan sementara yang telah mencapai konvergensi.

Koreksi kecepatan dapat diperoleh dengan menghitung hubungan antara komponen kecepatan dengan komponen tekanan. Menggunakan cara yang sama seperti langkah sebelumnya yaitu dengan melakukan pemisahan diperoleh Persamaan (4.7b). Komponen kecepatan pada sumbu-x yaitu

$$u_t = -\nabla P_x$$

$$\frac{(u_{n+1})_{i,j} - (u_n)_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{(P_n)_{i+1,j} - (P_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.13a)$$

Komponen kecepatan pada sumbu-y yaitu

$$v_t = -\nabla P_y$$

$$\frac{(v_{n+1})_{i,j} - (v_n)_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{(P_n)_{i,j+1} - (P_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (4.13b)$$

Karena menginginkan koreksi kecepatan pada saat kondisi ke- $n + 1$ maka komponen kecepatan pada kondisi ke- n diasumsikan nol.

$$(u_n)_{i,j} = 0 \quad (4.14a)$$

$$(v_n)_{i,j} = 0 \quad (4.14b)$$

Mensubstitusikan Persamaan (4.14a) kedalam Persamaan (4.13a) diperoleh koreksi komponen kecepatan pada sumbu-x

$$(u_{n+1})_{i,j} = -\Delta t \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} - (P_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)$$

Mensubstitusikan Persamaan (4.14b) kedalam Persamaan (4.13b) diperoleh koreksi komponen kecepatan pada sumbu-y

$$(v_{n+1})_{i,j} = -\Delta t \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} - (P_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

Langkah 5 yaitu memperbarui semua nilai komponen.

Komponen Tekanan

$$(P_{n+1})_{i,j} = (P_n^*)_{i,j} + (P_n)_{i,j}$$

Komponen Kecepatan

$$(u_{n+1})_{i,j} = (u_n^*)_{i,j} + (u_{n+1})_{i,j}$$

$$(v_{n+1})_{i,j} = (v_n^*)_{i,j} + (v_{n+1})_{i,j}$$

Penyelesaian persamaan Navier-Stokes masih berupa sistem persamaan. Selanjutnya, semua parameter berupa koefisien-koefisien untuk semua variabel dimasukkan pada saat simulasi.

4.2 Penyusunan Algoritma

Penyusunan algoritma dilakukan untuk mempermudah mengetahui gambaran keseluruhan penyelesaian numerik pada pembahasan subbab 4.1. Selain itu, penyusunan algoritma berguna untuk membantu membuat perancangan simulasi yang dilakukan menggunakan *software* MATLAB.

4.2.1 Algoritma Penyelesaian Persamaan Navier-Stokes

Algoritma ini berisi langkah-langkah penyelesaian persamaan Navier-Stokes. Algoritma ini disajikan pada Gambar 4.1. Berikut adalah penjelasan dari algoritmanya :

1. Inisial parameter area yaitu menentukan panjang area (nx) dan luas area (ny).
2. Inisial parameter metode SOR yaitu menentukan nilai toleransi = 10^{-7} dan omega = 1.8.
3. Inisial kondisi awal yaitu menentukan kecepatan awal $u = 1$, $v = 0$ dan $P = 0$.
4. Membuat objek silinder dengan menentukan titik pusat silinder (a, b) dan jari-jari silinder (r). Selanjutnya, agar

objek silinder terlihat dalam area aliran fluida maka area silinder diberikan nilai nol. Aliran silinder dapat ditulis dengan

$$(nx/a)^2 + (ny/b)^2 = r^2$$

5. Menyelesaikan persamaan momentum untuk memperoleh kecepatan sementara $(u_{n+1}^*)_{i,j}$ dan $(v_{n+1}^*)_{i,j}$.
6. Melakukan pembaruan nilai kecepatan yang digunakan untuk perhitungan selanjutnya.

$$(u_n)_{i,j} = (u_{n+1}^*)_{i,j}$$

$$(v_n)_{i,j} = (v_{n+1}^*)_{i,j}$$

7. Menghitung persamaan divergensi $\nabla(u_n)_{i,j}$ yang digunakan dalam persamaan Poisson.
8. Menghitung persamaan Poisson untuk memperoleh nilai komponen tekanan $(P_n)_{i,j}$.
9. Menggunakan metode SOR untuk mempercepat konvergensi pada nilai tekanan. Langkah-langkahnya yaitu

a) Menentukan toleransi dan omega seperti pada nomor 2.

b) Menghitung ulang $(P_n)_{i,j}$ dengan metode SOR yaitu

$$(P_n)_{i,j} = (1 - \omega)((P_{n-1})_{i,j}) + \omega(P_n)_{i,j}$$

c) Menentukan error dari tekanan yaitu $(P_n)_{i,j} - (P_{n-1})_{i,j}$.

d) Jika memenuhi kondisi $err > tol$ atau $iter > imax$ maka SOR berhenti dan diperoleh nilai tekanan $(P_n)_{i,j}$. Dimana imax adalah maksimum iterasi yaitu 1000.

e) Jika tidak memenuhi kondisi (c) maka melakukan ulang ke nomor 8 sampai mencapai kondisi (c).

10. Melakukan koreksi nilai untuk komponen tekanan yaitu

$$(P_{n+1})_{i,j} = (P_n^*)_{i,j} + (P_n)_{i,j}$$

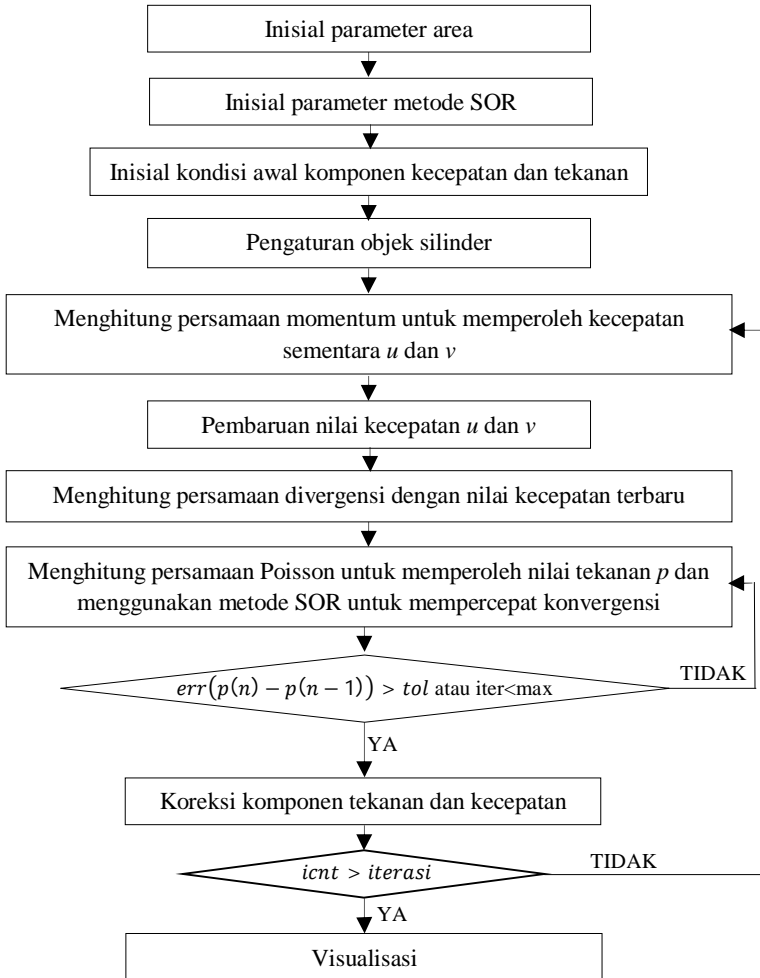
dan komponen kecepatan-x yaitu

$$(u_{n+1})_{i,j} = (u_n^*)_{i,j} - \Delta t \left(\frac{(P_n)_{i+1,j} - (P_n)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)$$

Komponen kecepatan-y yaitu

$$(v_{n+1})_{i,j} = (v_n^*)_{i,j} - \Delta t \left(\frac{(P_n)_{i,j+1} - (P_n)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

11. Kemudian ulang sampai kondisi $icnt > iterasi$ terpenuhi.



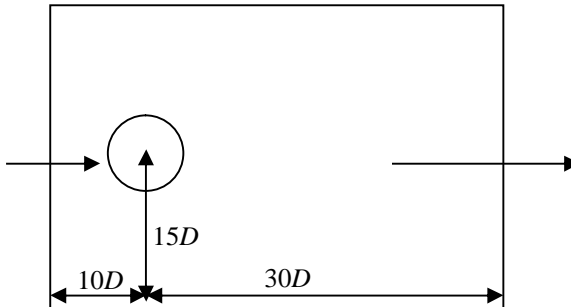
Gambar 4.1. Diagram alir algoritma penyelesaian persamaan Navier-Stokes

4.3 Analisis Penyelesaian

Melakukan analisis penyelesaian berdasarkan hasil simulasi yang dimulai simulasi aliran fluida di sekitar silinder tunggal dengan bilangan Reynolds 100, 500, 1000, 3000 dan 5000. Selanjutnya, melakukan analisis hasil simulasi aliran fluida di sekitar dua silinder yang tersusun *side-by-side* dengan pengaturan bilangan Reynolds dan jarak antar dua silinder.

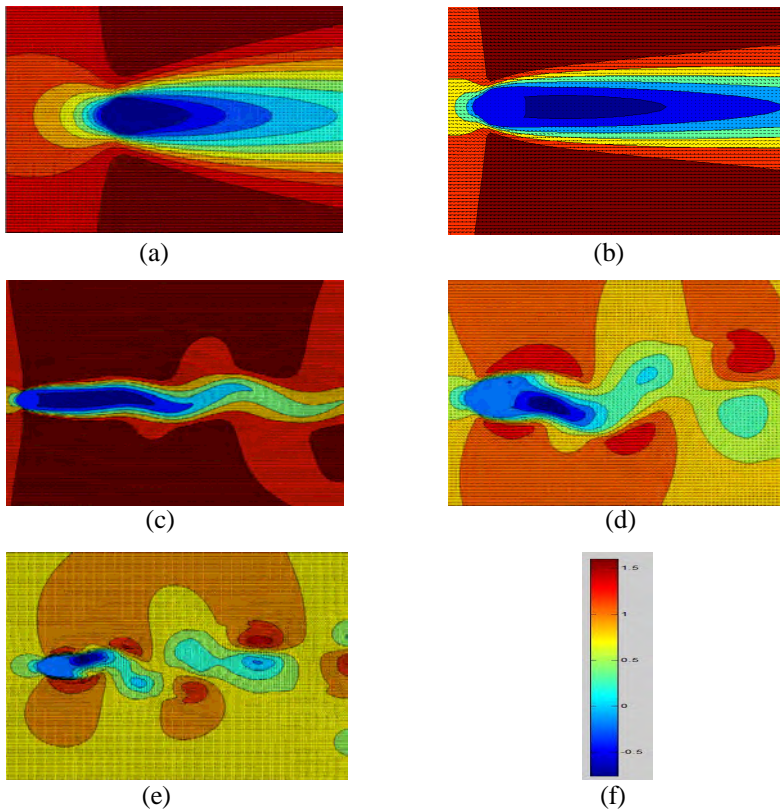
4.3.1 Hasil Simulasi Silinder Tunggal

Skema yang digunakan untuk simulasi silinder tunggal yaitu meletakkan silinder pada posisi $10D$ dari aliran masuk dan $15D$ dari batas bawah.



Gambar 4.2. Skema silinder tunggal

Simulasi pada silinder tunggal digunakan sebagai cek hasil validasi pada penelitian Tugas Akhir ini dengan penelitian sebelumnya. Hasil dari simulasi pada silinder tunggal yaitu profil aliran fluida pada komponen kecepatan dan komponen tekanan, distribusi tekanan dan koefisien hambat yang diterima silinder. Kemudian, hasil koefisien hambat divalidasi dengan hasil penelitian sebelumnya. Hasil distribusi tekanan selanjutnya digunakan sebagai dasar untuk mengetahui pengaruh jarak antar silinder yang dilakukan pada simulasi selanjutnya.

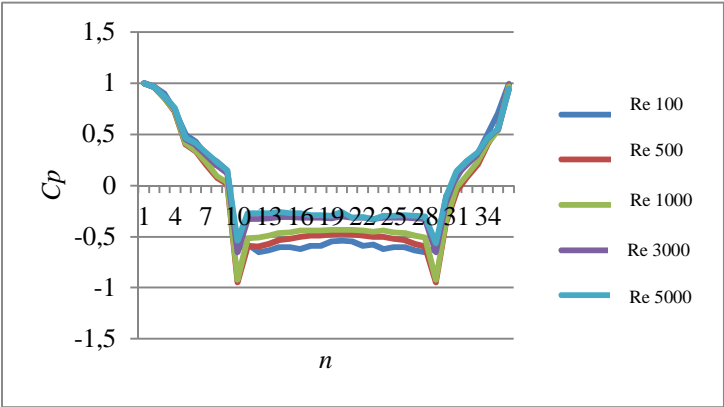


Gambar 4.3. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder tunggal. (a) $Re=100$, (b) $Re=500$, (c) $Re=1000$, (d) $Re=3000$, (e) $Re=5000$ dan (f) Keterangan warna yang menunjukkan nilai dari komponen kecepatan

Pada gambar 4.3. saat $Re=100$ dan $Re=500$ aliran fluida mengalir secara laminar. Tepat dibelakang silinder terdapat pusaran aliran. Hal ini sama seperti penelitian yang dilakukan oleh Sintu Singha dan K.P. Sinmahapatra[4]. Pada $Re=1000$, pola aliran *flip-flop* di belakang silinder terlihat namun masih kecil. Bilangan Reynolds yang semakin besar membuat pola aliran *flip-*

flop semakin terlihat bersamaan dengan adanya pusaran aliran yang berada dibelakang silinder.

Selanjutnya menghitung distribusi tekanan berdasarkan nilai pada komponen tekanan di sekitar silinder. Proses pengambilan nilai tekanan diperoleh dengan cara mengambil data tekanan pada posisi sudut θ yang sudah ditentukan. Diperoleh hasil pada Gambar 4.4, nilai maksimum minimum dari tekanan disajikan dalam Tabel 4.1 dan diperoleh koefisien hambat dalam Tabel 4.2



Gambar 4.4. Distribusi tekanan silinder tunggal pada $Re = 100, 500, 1000, 3000$ dan 5000

Tabel 4.1. Distribusi tekanan silinder tunggal

Re	Silinder			
	Maks	Sudut	Min	Sudut
100	1	0°	-0.65172	270°
500	1	0°	-0.92778	90°
1000	1	0°	-0.92223	280°
3000	1	0°	-0.65513	280°
5000	1	0°	-0.56853	280°

Tabel 4.2. Koefisien hambat silinder tunggal

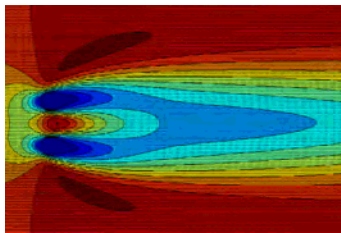
Re	Peneliti	Sintu[4]	Sarvghad[3]
100	1.17	1.38	1.36
500	1.01	-	-
1000	0.96	-	-
3000	0.87	-	-
5000	0.85	-	-

4.3.2 Hasil Penelitian Dua Silinder

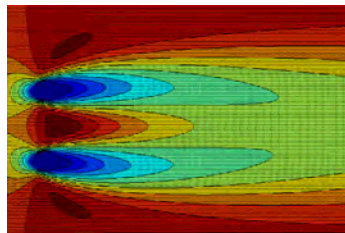
Setelah mengetahui hasil simulasi pada silinder tunggal, selanjutnya melakukan analisis hasil simulasi dua silinder yang disusun bersampingan. Pada simulasi ini, melakukan uji coba jarak antara dua silinder kemudian melakukan analisis untuk mengetahui pengaruh jarak terhadap koefisien hambat yang diterima silinder dan pengaruh perubahan bilangan Reynolds terhadap profil aliran fluida yang melewati dua silinder.

4.3.2.1 Uji Coba $Re = 100$

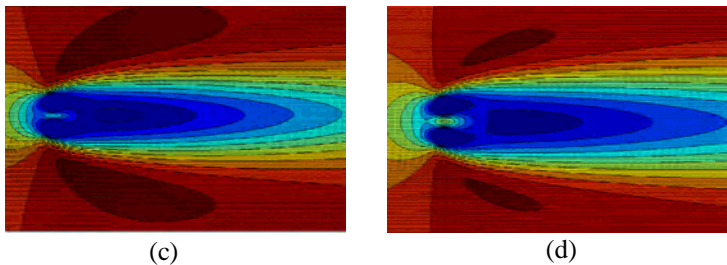
Uji coba yang pertama dilakukan pada $Re=100$ dan jarak $1.5D$, $2D$, $3D$, $4D$. Hasil simulasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.5. Aliran fluida yang melewati dua silinder dengan $Re=100$ mendapat pengaruh jarak antar silinder. Akibatnya, semakin kecil jarak antar silinder maka koefisien yang diterima silinder semakin kecil mendekati silinder tunggal. Data koefisien hambat dapat dilihat pada Tabel 4.3.



(a)



(b)



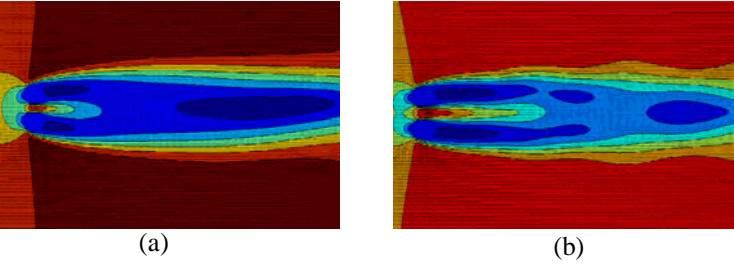
Gambar 4.5. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re= 100$
(a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$

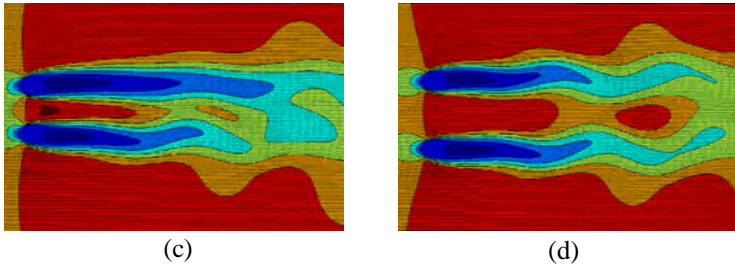
Tabel 4.3. Koefisien hambat dua silinder $Re= 100$

Jarak	Koefisien Hambat	
	Silinder Atas	Silinder Bawah
$1.5D$	1.347241	1.379309
$2D$	1.321302	1.319067
$3D$	1.344778	1.253013
$4D$	1.236159	1.201818

4.3.2.2 Uji Coba $Re = 500$

Uji coba yang kedua dilakukan pada $Re=500$ dan jarak $1.5D$, $2D$, $3D$, $4D$. Hasil simulasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.6. Aliran fluida yang melewati dua silinder dengan $Re=500$ mendapat pengaruh jarak antar silinder. Semakin kecil jarak antar silinder maka koefisien yang diterima silinder semakin kecil mendekati silinder tunggal. Data koefisien hambat dapat dilihat pada Tabel 4.4.





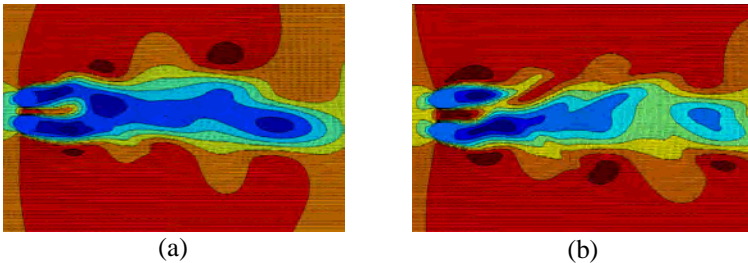
Gambar 4.6. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=500$
 (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$

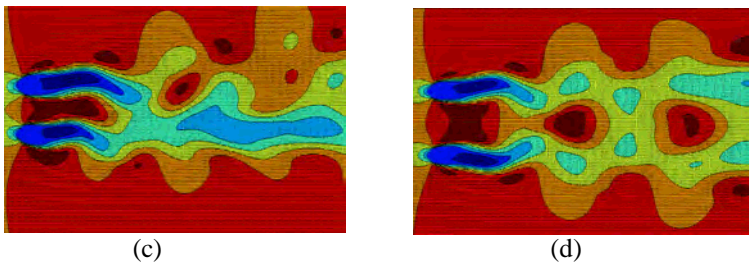
Tabel 4.4. Koefisien hambatan dua silinder $Re=500$

Jarak	Koefisien Hambat	
	Silinder Atas	Silinder Bawah
$1.5D$	1.276465	1.1779
$2D$	1.24695	1.158718
$3D$	1.278374	1.097212
$4D$	1.059103	1.026247

4.3.2.3 Uji Coba $Re = 1000$

Uji coba yang ketiga dilakukan pada $Re=1000$ dan jarak $1.5D$, $2D$, $3D$, $4D$. Hasil simulasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.7. Aliran fluida yang melewati dua silinder dengan $Re=1000$ saat jarak $3D$ terjadi kenaikan koefisien hambatan. Selanjutnya, jarak $4D$ koefisien hambatan mendekati nilai koefisien hambatan silinder tunggal. Data koefisien hambatan dapat dilihat pada Tabel 4.5





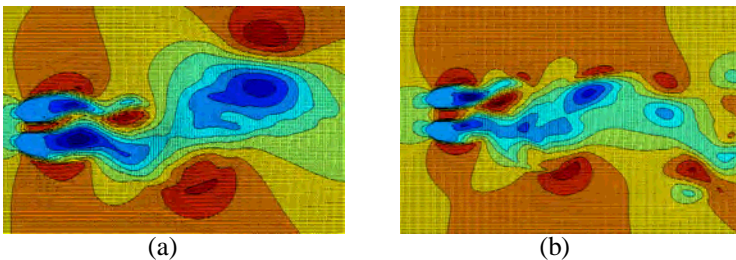
Gambar 4.7. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=1000$
 (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$

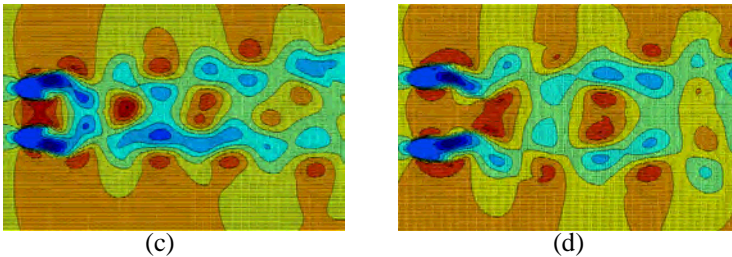
Tabel 4.5. Koefisien hambat dua silinder $Re= 1000$

Jarak	Koefisien Hambat	
	Silinder Atas	Silinder Bawah
$1.5D$	1.255328	1.368673
$2D$	1.22182	1.179905
$3D$	1.508232	1.193285
$4D$	1.142646	1.118572

4.3.2.4 Uji Coba $Re = 3000$

Uji coba yang keempat dilakukan pada $Re=3000$ dan jarak $1.5D$, $2D$, $3D$, $4D$. Hasil simulasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.8. Aliran fluida yang melewati dua silinder dengan $Re=3000$ mendapat pengaruh jarak antar silinder. Akibatnya, terjadi osilasi koefisien hambat terhadap iterasi. Sehingga, data koefisien hambat yang dihasilkan belum maksimal. Data koefisien hambat dapat dilihat pada Tabel 4.6





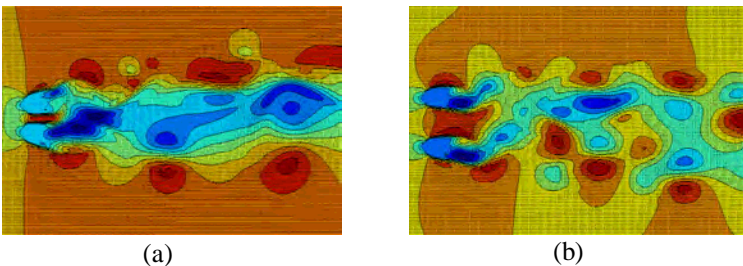
Gambar 4.8. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=3000$
 (a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$

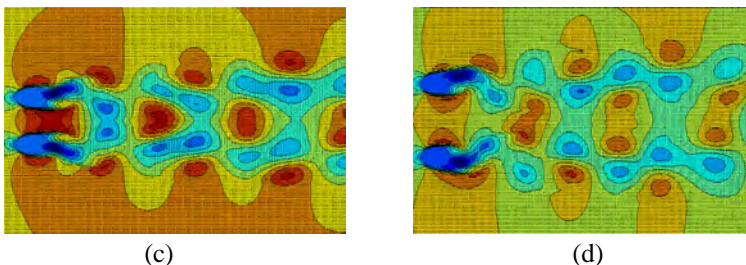
Tabel 4.6. Koefisien hambat dua silinder $Re=3000$

Jarak	Koefisien Hambat	
	Silinder Atas	Silinder Bawah
$1.5D$	1.457515	1.258648
$2D$	1.312698	1.662433
$3D$	1.957543	1.57959
$4D$	1.41586	1.319564

4.3.2.5 Uji Coba $Re=5000$

Uji coba yang terakhir dilakukan pada $Re=5000$ dan jarak $1.5D$, $2D$, $3D$, $4D$. Hasil simulasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.9. Aliran fluida yang melewati dua silinder dengan $Re=5000$ mendapat pengaruh jarak antar silinder. Akibatnya, terjadi osilasi koefisien hambat terhadap iterasi. Sehingga, data koefisien hambat yang dihasilkan belum maksimal. Data distribusi tekanan dapat dilihat pada Tabel 4.7





Gambar 4.9. Profil kecepatan aliran fluida di sekitar silinder $Re=3000$
(a) $L/D=1.5$, (b) $L/D=2$, (c) $L/D=3$ dan (d) $L/D=4$

Tabel 4.7. Koefisien hambatan dua silinder $Re=5000$

Jarak	Koefisien Hambat	
	Silinder Atas	Silinder Bawah
$1.5D$	1.061081	1.470123
$2D$	1.711419	1.607484
$3D$	1.947825	1.63699
$4D$	1.658247	1.530206

4.4 Persamaan Koefisien Hambat $C_d(L/D)$

Persamaan koefisien hambatan dalam tugas akhir ini merupakan fungsi C_d terhadap jarak antar silinder. Untuk mencari persamaan koefisien hambatan membutuhkan data koefisien hambatan lebih banyak pada interval $L/D \in [1.5, 4]$. Untuk itu, dalam simulasi dilakukan percobaan untuk memperoleh data koefisien hambatan.

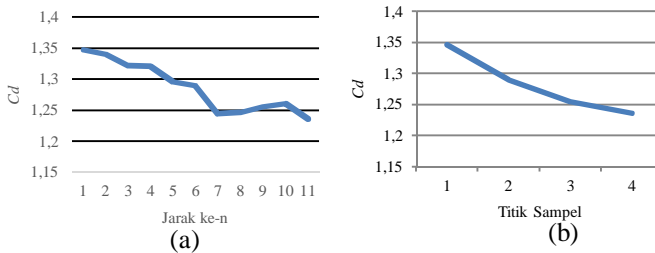
4.4.1 Persamaan Koefisien Hambat $Re = 100$

Hasil penelitian koefisien hambatan $Re=100$ ditampilkan dalam Tabel 4.8.

Tabel 4.8. Sebelas data koefisien hambatan dua silinder

$Re=100$			
Titik	Jarak	Atas	Bawah
1	$1.5 D$	1.347241	1.379309
2	$1.75 D$	1.339918	1.396072

3	2 D	1.321302	1.319067
4	2.25 D	1.320256	1.321466
5	2.5 D	1.295808	1.25677
6	2.75 D	1.290165	1.25056
7	3 D	1.244778	1.253013
8	3.25 D	1.24627	1.234811
9	3.5 D	1.255348	1.234323
10	3.75 D	1.260888	1.216553
11	4 D	1.236159	1.201818



Gambar 4.10. Data silinder atas $Re = 100$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Dengan menggunakan 4 data koefisien hambat akan dicari persamaan koefisien hambat dengan persamaan polinomial tingkat tiga empat variabel. Bentuk umum persamaan polinomial tersebut adalah

$$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (4.15)$$

dimana y merupakan C_d . Sedangkan, x merupakan jarak dengan rasio L/D .

Selanjutnya, mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder atas dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.347241 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.290165 = 20.796875a_0 + 7.5625a_1 + 2.75a_2 + a_3$$

$$1.255348 = 42.875a_0 + 12.25a_1 + 3.5a_2 + a_3$$

$$1.236159 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

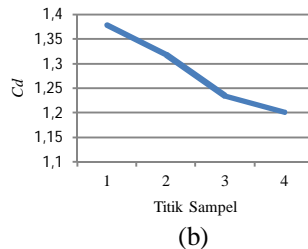
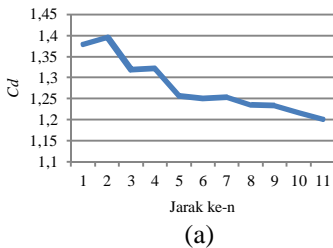
Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.0016$, $a_1 = 0.0164$, $a_2 = -0.0954$ dan $a_3 = 1.4616$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0016x^3 + 0.0164x^2 - 0.0954x + 1.4616 \quad (4.16a)$$

Pada Persamaan (4.16a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh eror dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.9.

Tabel 4.9. Error persamaan koefisien hambat pada silinder atas $Re=100$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.347241	1.35	0.002759
2	1.290165	1.29005	0.00005
3	1.255348	1.26	0.004652
4	1.236159	1.24	0.003841



Gambar 4.11. Data silinder bawah $Re=100$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder bawah dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.379309 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.319067 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$1.234811 = 34.328125a_0 + 10.5625a_1 + 3.25a_2 + a_3$$

$$1.201818 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.0074$, $a_1 = 0.0806$, $a_2 = -0.3337$ dan $a_3 = 1.7237$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0074x^3 + 0.0806x^2 - 0.3337x + 1.7237 \quad (4.16b)$$

Pada Persamaan (4.16b) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh eror dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.10.

Tabel 4.10. Error persamaan koefisien hambat pada silinder bawah $Re=100$

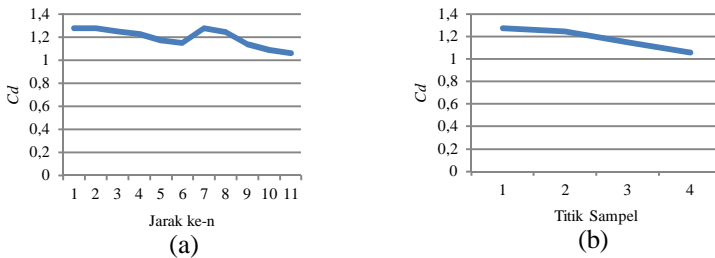
Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Eror
1	1.379309	1.379525	0.000216
2	1.319067	1.3195	0.000433
3	1.234811	1.236484	0.001673
4	1.201818	1.2049	0.003082

4.4.2 Persamaan Koefisien Hambat $Re = 500$

Hasil penelitian koefisien hambat $Re=500$ ditampilkan dalam Tabel 4.11.

Tabel 4.11. Sebelas data koefisien hambat dua silinder $Re=500$

$Re= 500$			
Titik	Jarak	S. Atas	S. Bawah
1	1.5 D	1.276465	1.1779
2	1.75 D	1.278229	1.210225
3	2 D	1.24695	1.158718
4	2.25 D	1.229418	1.126277
5	2.5 D	1.173316	1.06541
6	2.75 D	1.148738	1.049816
7	3 D	1.278374	1.097212
8	3.25 D	1.244875	1.068762
9	3.5 D	1.139247	1.12337
10	3.75 D	1.088684	1.09934
11	4 D	1.059103	1.026247



Gambar 4.12. Data silinder atas $Re=500$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Selanjutnya, mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder atas dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.276465 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.24695 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$1.244875 = 34.328125a_0 + 10.5625a_1 + 3.25a_2 + a_3$$

$$1.059103 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

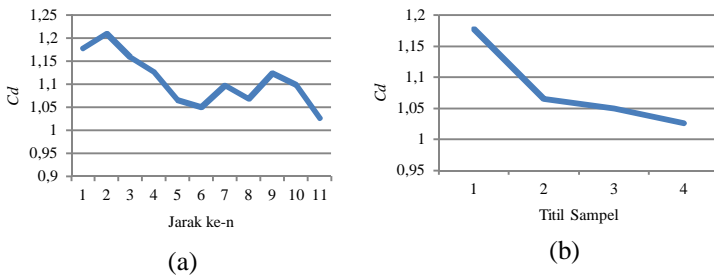
Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.0623$, $a_1 = 0.4534$, $a_2 = -1.0696$ dan $a_3 = 2.0710$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0623x^3 + 0.4534x^2 - 1.0696x + 2.0710 \quad (4.17a)$$

Pada Persamaan (4.17a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh error dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.12.

Tabel 4.12. Error persamaan koefisien hambat pada silinder atas $Re=500$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.276465	1.2764875	0.0000225
2	1.246950	1.247000	0.00005
3	1.244875	1.245195	0.00032
4	1.059103	1.059800	0.000697



Gambar 4.13. Data silinder bawah $Re=500$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan

Mensubstitusikan empat data koefisien hambatan silinder bawah dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.1779 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.06541 = 15.625a_0 + 6.25a_1 + 2.5a_2 + a_3$$

$$1.049816 = 20.796875a_0 + 7.5625a_1 + 2.75a_2 + a_3$$

$$1.026247 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

Kemudian menggunakan eliminasi, diperoleh koefisien $a_0 = -0.0044$, $a_1 = 0.0700$, $a_2 = -0.3382$ dan $a_3 = 1.5427$.

Jadi, diperoleh persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0044x^3 + 0.0700x^2 - 0.3382x + 1.5427 \quad (4.17b)$$

Pada Persamaan (4.17a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh error dari persamaan koefisien hambatan yang disajikan dalam Tabel 4.13.

Tabel 4.13. Error persamaan koefisien hambatan pada silinder bawah $Re=500$

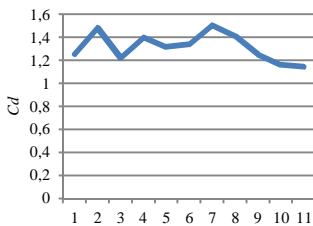
Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.1779	1.17805	0.00015
2	1.06541	1.06595	0.00054
3	1.049816	1.050519	0.0007
4	1.026247	1.028300	0.002053

4.4.3 Persamaan Koefisien Hambat $Re = 1000$

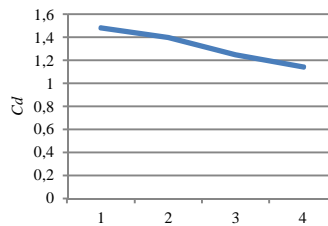
Hasil penelitian koefisien hambat $Re = 1000$ ditampilkan dalam Tabel 4.14.

Tabel 4.14. Koefisien hambat dua silinder $Re = 1000$

Re 1000			
Titik	Jarak	Atas	Bawah
1	1.5 D	1.255328	1.368673
2	1.75 D	1.486993	1.119676
3	2 D	1.22182	1.179905
4	2.25 D	1.40014	1.088321
5	2.5 D	1.319274	1.179905
6	2.75 D	1.338841	1.140723
7	3 D	1.508232	1.193285
8	3.25 D	1.411326	1.188586
9	3.5 D	1.25273	1.246307
10	3.75 D	1.162178	1.225961
11	4 D	1.142646	1.118572



(a)



(b)

Gambar 4.14. Data silinder atas $Re = 1000$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Selanjutnya, mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder atas dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.486993 = 5.359375a_0 + 3.0625a_1 + 1.75a_2 + a_3$$

$$1.40014 = 11.390625a_0 + 5.0625a_1 + 2.25a_2 + a_3$$

$$1.25273 = 42.875a_0 + 12.25a_1 + 3.5a_2 + a_3$$

$$1.142646 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

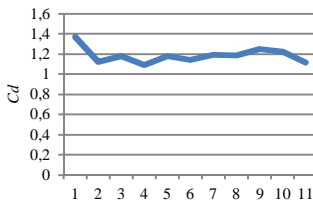
Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.0401$, $a_1 = 0.3329$, $a_2 = -1.0211$ dan $a_3 = 2.4695$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0401x^3 + 0.3329x^2 - 1.0211x + 2.4695 \quad (4.18a)$$

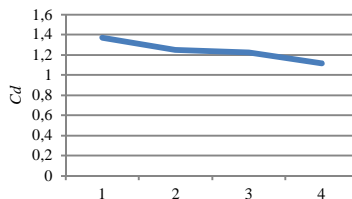
Pada Persamaan (4.18a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh eror dari persamaan koefisien hambatan yang disajikan dalam Tabel 4.15

Tabel 4.15. Error persamaan koefisien hambatan pada silinder atas $Re=1000$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.486993	1.487170	0.000177
2	1.40014	1.400567	0.000427
3	1.25273	1.2543875	0.001658
4	1.142646	1.1451	0.002454



(a)



(b)

Gambar 4.15. Data silinder bawah $Re= 1000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan

Mensubstitusikan empat data koefisien hambatan silinder bawah dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.368673 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.246307 = 42.875a_0 + 12.25a_1 + 3.5a_2 + a_3$$

$$1.225961 = 52.734375a_0 + 14.0625a_1 + 3.75a_2 + a_3$$

$$1.118572 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.2749$, $a_1 = 2.3968$, $a_2 = -6.6150$ dan $a_3 = 6.8263$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.2749x^3 + 2.3968x^2 - 6.6150x + 6.8263 \quad (4.18b)$$

Pada Persamaan (4.18b) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh error dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.16.

Tabel 4.16. Error persamaan koefisien hambat pada silinder bawah $Re=1000$

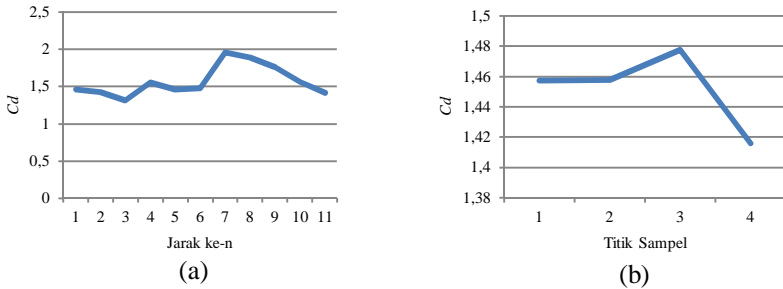
Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.368673	1.3688125	0.000139
2	1.246307	1.2482625	0.00195
3	1.225961	1.228370	0.001658
4	1.118572	1.1451	0.002409

4.4.4 Persamaan Koefisien Hambat $Re = 3000$

Hasil penelitian koefisien hambat $Re= 3000$ ditampilkan dalam Tabel 4.17.

Tabel 4.17. Koefisien hambat dua silinder $Re= 3000$

$Re=3000$			
Titik	Jarak	Atas	Bawah
1	1.5 D	1.457515	1.258648
2	1.75 D	1.425156	1.302321
3	2 D	1.312698	1.662433
4	2.25 D	1.557353	1.249555
5	2.5 D	1.457821	1.322644
6	2.75 D	1.477593	1.425835
7	3 D	1.957543	1.57959
8	3.25 D	1.891799	1.443124
9	3.5 D	1.765959	1.692444
10	3.75 D	1.562039	1.591999
11	4 D	1.41586	1.319564



Gambar 4.16. Data silinder atas $Re= 3000$: (a) 11 data koefisien hambatan, (b) 4 data koefisien hambatan

Selanjutnya, mensubstitusikan empat data koefisien hambatan silinder atas dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.457515 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.457821 = 15.625a_0 + 6.25a_1 + 2.5a_2 + a_3$$

$$1.477593 = 20.796875a_0 + 7.5625a_1 + 2.75a_2 + a_3$$

$$1.41586 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

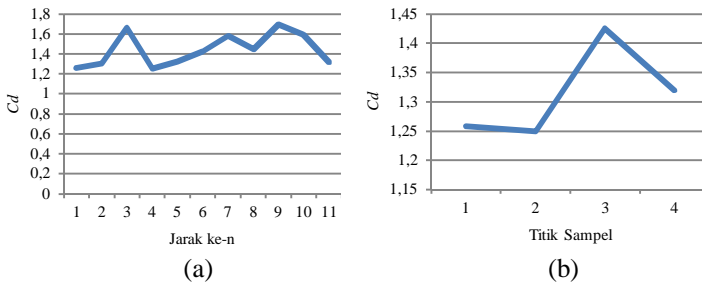
Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.0595$, $a_1 = 0.4644$, $a_2 = -1.1290$ dan $a_3 = 2.3067$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.0595x^3 + 0.4644x^2 - 1.1290x + 2.3067 \quad (4.19a)$$

Pada Persamaan (4.19a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh error dari persamaan koefisien hambatan yang disajikan dalam Tabel 4.18

Tabel 4.18. Error persamaan koefisien hambatan pada silinder atas $Re=3000$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.457515	1.416788	0.040787
2	1.457821	1.457013	0.000808
3	1.477593	1.476561	0.001032
4	1.41586	1.4131	0.00276



Gambar 4.17. Data silinder bawah $Re=3000$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder bawah dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.258648 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.249555 = 11.390625a_0 + 5.0625a_1 + 2.25a_2 + a_3$$

$$1.425835 = 20.796875a_0 + 7.5625a_1 + 2.75a_2 + a_3$$

$$1.319564 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.2167$, $a_1 = 1.7004$, $a_2 = -4.0725$ dan $a_3 = 4.2729$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.2167x^3 + 1.7004x^2 - 4.0725x + 4.2729 \quad (4.19b)$$

Pada Persamaan (4.19b) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh error dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.19.

Tabel 4.19. Error persamaan koefisien hambat pada silinder bawah $Re=3000$

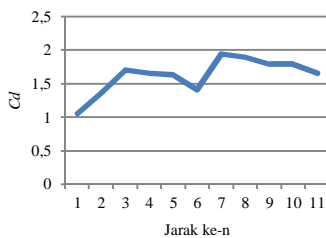
Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.258648	1.258687	0.000039
2	1.249555	1.249702	0.000147
3	1.425835	1.426117	0.000282
4	1.319564	1.3205	0.000936

4.4.5 Persamaan Koefisien Hambat $Re = 5000$

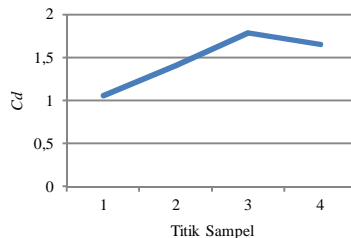
Hasil penelitian koefisien hambat $Re=5000$ ditampilkan dalam Tabel 4.20.

Tabel 4.20. Koefisien hambat dua silinder $Re=5000$

$Re=5000$			
Titik	Jarak	S. Atas	S. Bawah
1	$1.5 D$	1.061081	1.470123
2	$1.75 D$	1.361715	1.774898
3	$2 D$	1.711419	1.607484
4	$2.25 D$	1.664988	1.167138
5	$2.5 D$	1.634299	1.403433
6	$2.75 D$	1.408087	1.431901
7	$3 D$	1.947825	1.63699
8	$3.25 D$	1.894764	1.54689
9	$3.5 D$	1.793937	1.871867
10	$3.75 D$	1.795093	1.818919
11	$4 D$	1.658247	1.530206



(a)



(b)

Gambar 4.18. Data silinder atas $Re=5000$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder atas dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.061081 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.408087 = 20.796875a_0 + 7.5625a_1 + 2.75a_2 + a_3$$

$$1.793937 = 42.875a_0 + 12.25a_1 + 3.5a_2 + a_3$$

$$1.658247 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

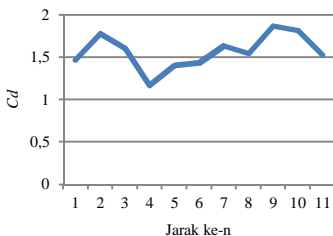
Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = -0.2988$, $a_1 = 2.4345$, $a_2 = -5.9037$ dan $a_3 = 5.4478$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = -0.2988x^3 + 2.4345x^2 - 5.9037x + 5.4478 \quad (4.20a)$$

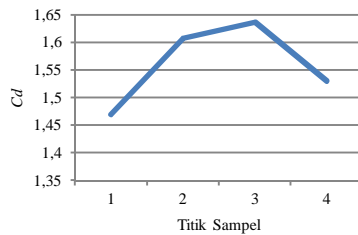
Pada Persamaan (4.20a) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh eror dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.21.

Tabel 4.21. Error persamaan koefisien hambat pada silinder atas $Re=3000$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Error
1	1.061081	1.061425	0.000344
2	1.408087	1.409425	0.001338
3	1.793937	1.796425	0.002488
4	1.658247	1.661800	0.003553



(a)



(b)

Gambar 4.19. Data silinder atas $Re=5000$: (a) 11 data koefisien hambat, (b) 4 data koefisien hambat

Mensubstitusikan empat data koefisien hambat silinder bawah dalam Persamaan (4.15) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$1.470123 = 3.375a_0 + 2.25a_1 + 1.5a_2 + a_3$$

$$1.607484 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$1.63699 = 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 + a_3$$

$$1.530206 = 64a_0 + 16a_1 + 4a_2 + a_3$$

Kemudian diperoleh koefisien $a_0 = 0.0381, a_1 = -0.4113, a_2 = 1.3617$ dan $a_3 = 0.2244$. Jadi persamaan polinomial sebagai berikut :

$$y = 0.0381x^3 - 0.4113x^2 + 1.3617x + 0.2244 \quad (4.20b)$$

Pada Persamaan (4.20b) dibandingkan dengan data hasil simulasi. Sehingga, diperoleh eror dari persamaan koefisien hambat yang disajikan dalam Tabel 4.22.

Tabel 4.22. Eror persamaan koefisien hambat pada silinder bawah $Re=5000$

Titik Sampel	Titik asli	Titik Pers.	Eror
1	1.470123	1.470113	0.000010
2	1.607484	1.607400	0.000084
3	1.63699	1.636500	0.00049
4	1.530206	1.528800	0.001406

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V

PENUTUP

Bab ini merupakan penutup, berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari penyelesaian permasalahan pada bab sebelumnya dan saran yang diberikan bila Tugas Akhir ini dilanjutkan.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan hasil simulasi pada bab sebelumnya dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pada $Re=100$ dan 500 profil aliran fluida yang dihasilkan tidak terdapat pusaran dan tidak terjadi turbulensi. Sedangkan, pada $Re=1000$, 3000 dan 5000 profil aliran fluida terdapat pusaran dan terjadi turbulensi.
2. Pada $Re=100$, 500 dan 1000 semakin lebar jarak antar silinder maka koefisien hambat semakin kecil mendekati nilai koefisien hambat pada silinder tunggal.
3. Semakin besar bilangan Reynolds membutuhkan waktu yang semakin lama untuk mencapai konvergensi yang diinginkan.
4. Semakin besar bilangan Reynolds maka semakin kecil nilai koefisien hambat yang diterima silinder.
5. Nilai koefisien hambat yang diterima silinder mendapatkan pengaruh jarak sampai pada jarak maksimum antar dua silinder yaitu $4D$. Dimana D adalah diameter silinder.
6. Memperoleh persamaan koefisien hambat $Cd(L/D)$ disetiap pengaturan bilangan Reynolds dan jarak antar silinder dimana L adalah jarak antara silinder.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan dan penyelesaian permasalahan pada Tugas Akhir ini, saran diberikan untuk pengembangan selanjutnya yaitu untuk mengetahui pengaruh jarak terhadap koefisien hambatan terhadap silinder maka dapat dilakukan penelitian menggunakan silinder dengan jumlah yang lebih banyak dan jarak yang berbeda-beda.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Imron, C., Widodo, B., & Yuwono, T. (2013). Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I-Shape Cylinder in a Tandem Configuration. *Applied Mathematical Sciences*, 7(114), 5657-5666.
- [2] Kitagawa, T., & Ohta, H. (2008). Numerical investigation on flow around circular cylinders in tandem arrangement at a subcritical Reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 24(5), 680-699.
- [3] Sarvghad-Moghaddam, H., Nooredin, N., & Ghadiri-Dehkordi, B. (2011). Numerical simulation of flow over two side-by-side circular cylinders. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 23(6), 792-805.
- [4] Singha, S., & Sinhamahapatra, K. P. (2010). Flow past a circular cylinder between parallel walls at low Reynolds numbers. *Ocean Engineering*, 37(8), 757-769.
- [5] Gera, B., Sharma, P. K., & Singh, R. K. (2010). CFD analysis of 2D unsteady flow around a square cylinder. *International Journal of applied engineering research*, 1(3), 602.
- [6] Mittal, R., & Balachandar, S. (1996). Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders. *Journal of Computational Physics*, 124(2), 351-367.
- [7] Van den Abeele, F., & Vande Voorde, J. (2011). Stability of Offshore Pipelines in Close Proximity to the Seabed. In *Proceedings of the 6th Pipeline Technology Conference, Hannover, Germany*.
- [8] Çengel, Y. A., Turner, R. H., Cimbala, J. M., & Kanoglu, M. (2008). *Fundamentals of thermal-fluid sciences*. McGraw-Hill.

- [9] Mallick, M., Kumar, A., Tamboli, N., Kulkarni, A. B., Sati, P., Devi, V., & Bhandare, U. (2014). Study on Drag Coefficient for the Flow Past a Cylinder. *International Journal of Civil Engineering Research*, 5(4), 301-306.
- [10] Matyka, M. (2004). Solution to two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations with SIMPLE, SIMPLER and Vorticity-Stream Function Approaches. Driven-Lid Cavity Problem: Solution and Visualization. *arXiv preprint physics/0407002*.
- [11] Drillingformulas.com. (2012). Flow Regime and Critical Reynold Number Laminar, transition and turbulent flow. <http://www.drillingformulas.com/wp-content/uploads/2012/-05/>. 14 Juli 2015 pukul 08.00 WIB.
- [12] Rumushitung. (2013). Rumus Mencari Densitas (Massa Jenis). <http://rumushitung.com/2013/08/09/rumus-mencari-densitas-massa-jenis/>. 14 Juli 2015 pukul 08.15 WIB.
- [13] Ridwan. Catatan Mekanika Fluida. <http://ridwan.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/10075/Karakteristik+Aliran+Fluida1.pdf>. 14 Juli 2015 pukul 08.20 WIB.
- [14] Segerlind, L. J., & Sauranders, H. (1987). Applied Finite Element Analysis.
- [15] McDonough, J. M. (2007). Lectures in Computational Fluid Dynamics of Incompressible Flow, 2, 45-47. *Departments of Mechanical Engineering and Mathematics*.

LAMPIRAN

A1. Kode Fungsi Inisial Komponen Kecepatan

```
function [ u,v,p ] = inisial( nx,ny,dx,dy,u,v
,iu )
for jy=0:ny-1
    for jx=0:nx-1
        j=nx*jy+jx+1;
        p(j)=0;
        if(iu(j)>0)
            u(j)=0;
            v(j)=0;
        else
            u(j)=1;
            v(j)=0;
        end
    end
end
end
```

A2. Kode Fungsi Penyelesaian Persamaan Momentum (Persamaan Adveksi)

```
function [ft]=adveksi(
    ft,f,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu)
psilx=nx/4;
for jy=2:ny-3
    for jx=2:nx-3
        j=nx*(jy)+(jx+1);
        if iu(j) > 0
            ft(j) = 0;
            continue;
        end
        if (mod(j,nx)<=psilx)
            if(u(j) > 0.0)
                fx = (2.0*f(j+1) + 3.0*f(j) -
                    6.0*f(j-1) + f(j-2))/(6.0*dx);
            else
                fx =(-f(j+2)+6.0*f(j+1)-
```



```

        3.0*f(j)-2.0*f(j-1))/(6.0*dx);

    end
    if(v(j) > 0.0)
        fy = (2.0*f(j+nx) + 3.0*f(j) -
6.0*f(j-nx) + f(j-2*nx))/(6.0*dy);
    else
        fy = (-f(j+2*nx)+6.0*f(j+nx)-
3.0*f(j)-2.0*f(j-nx))/(6.0*dy);
    end
else
    fx = (- f(j+2) + 8.0*f(j+1) -
8.0*f(j-1) + f(j-2))/(12.0*dx);
    fy = (- f(j+2*nx) + 8.0*f(j+nx) -
8.0*f(j-nx) + f(j-2*nx))/(12.0*dy);
end
    fxx = (f(j+1) - 2.0*f(j) + f(j-
1))/(dx*dx);
    fyy = (f(j+nx) - 2.0*f(j) + f(j-
nx))/(dy*dy);
    ft(j) = - u(j)*fx - v(j)*fy + (fxx
+ fyy)/Re;

end
end
end

```

A3. Kode Fungsi Boundary

```

function [f] = boundary( f,nx,ny )

for jy=2:ny-3
    f(nx-1,(jy+1))=f(nx-3,(jy+1));
    f(nx-2,(jy+1))=f(nx-3,(jy+1));
end

```

A4. Kode Fungsi Update Komponen Kecepatan

```

function fn = update( f,fn,ft,dt,nx,ny,iu )
for j=1:nx*ny

```

LAMPIRAN (LANJUTAN)

```

        fn(j)=f(j)+(ft(j)*dt);
end
j=1;
for i=1:ny
    fnmatrik(:,i)=fn(:,j:j+402);
    j=j+403;
end
fn = boundary(fnmatrik,nx,ny);
fn = reshape (fn,1,nx*ny);

```

A5. Kode Fungsi Menyelesaikan Persamaan Divergensi

```

function [div] = divergensi( nx,ny,dx,dy,u,v,div
)
for jy=5:ny-2
    for jx=5:nx-2
        j=nx*jy+jx;
        div(j) = 0.5*(u(j+nx+1) - u(j+nx) +
            u(j+1) - u(j))/dx+0.5*(v(j+nx+1) -
            v(j+1) + v(j+nx) - v(j))/dy;
    end
end
end

```

A6. Kode Fungsi Menyelesaikan Persamaan Poisson

```

function f = poisson(
nx,ny,dx,dy,f,s,omega,eps,iw )
imax=1000;
icnt=0;
while(icnt < imax)
    [err,f] = sor(nx,ny,dx,dy,f,s,omega,iw);
    if(eps > err)
        break;
    end
    icnt=icnt+1;
end
function [err,f] = sor(nx,ny,dx,dy,f,s,omega,iw)

```

```

err=0;

for jy=2:ny-3
    for jx=2:nx-3
        j=nx*(jy)+(jx+1);
        if iw(j)>0
            continue;
        end
        fn = (f(j+1)+f(j-1)+f(j+nx)+f(j-nx)-
s(j)*dx*dx )*0.25;
        err = max(abs(fn - f(j)),err);
        f(j) = (1.0 - omega)*f(j) +
omega*fn;
    end
end

j=1;
for i=1:ny
    fmatrik(:,i)=f(:,j:j+402);
    j=j+403;
end
f = boundary(fmatrik,nx,ny);
f = reshape (f,1,nx*ny);

```

A7. Kode Fungsi Rotasi

```

function [ posisiA ] = rotP(pusatA, titikA, teta )
A = [ cos(teta) -sin(teta);
      sin(teta) cos(teta)];
B = [ titikA(1)-pusatA(1);
      titikA(2)-pusatA(2)];
posisiA = A*B + [pusatA(1) ; pusatA(2)];

```

A8. Kode Simulasi (Penyelesaian Persamaan Navier-Stokes, Menghitung Distribusi Tekanan dan Koefisien Hambat)

```

clc
clear all

```

LAMPIRAN (LANJUTAN)

```

%-----PARAMETER AREA-----
RE=100;
NX=400;
NY=300;
%-----PARAMETER SOR-----
omega=1.8;
eps=10e-7;
%-----INISIAL BOUNDARY-----
nx=NX+3; ny=NY+3;
nout = 40;
time = 0;
icnt = 0;
Re=RE;
dx=0.01;
dy=0.01;
dt=0.001;
%-----IDENTITAS SILINDER-----
%pusat silinder atas (a,b)
aA=ny/2.09;
bA=nx/4;
pusatA=[aA bA]
pusat1A=[aA+1 bA+1]
r=5; %jari-jari
titikA=[aA bA-r];
titik1A=[aA bA-r];
%pusat silinder bawah (a,b)
aB=ny/1.89;
bB=nx/4;
pusatB=[aB bB];
pusat1B=[aB+1 bB+1];
r=5; %jari-jari
titikB=[aB bB-r];
titik1B=[aB bB-r];
%-----PENGATURAN DINDING OBJEK-----
for jy=0:ny-1
    for jx=0:nx-1
        j=nx*jy+jx+1;

```

```

        iw(j)=0;
        %silinder 1
        if((jx-nx/4)*(jx-nx/4) + (jy-
ny/2.09)*(jy-ny/2.09) < r*r)
            iw(j)=1;
            %silinder 2
            else if((jx-(nx/4))*(jx-(nx/4)) + (jy-
(ny/1.89))*(jy-(ny/1.89)) < r*r)
                iw(j)=1;
            end
        end
    end
end

for jy=0:ny-1
    for jx=0:nx-1
        j=nx*jy+jx+1;
        iu(j)=0;
        if(iw(max(1,j))==1 || iw(max(1,j-nx))==1
           || iw(max(1,j-1))==1 ||
           iw(max(1,j-nx-1))==1)
            iu(j) = 1;
        end
    end
end

%-----AREA UPDATE NILAI-----
u=zeros(1,nx*ny);
v=zeros(1,nx*ny);
un=zeros(1,nx*ny);
vn=zeros(1,nx*ny);
p=zeros(1,nx*ny);
[u,v,p]=inisial(nx,ny,dx,dy,u,v,iu);
[un,vn,p]=inisial(nx,ny,dx,dy,un,vn,iu);
div=zeros(1,nx*ny);
ut=zeros(1,nx*ny);
vt=zeros(1,nx*ny);
um=zeros(1,nx*ny);
vm=zeros(1,nx*ny);
icnt=0;

```

LAMPIRAN (LANJUTAN)

```

time=0;
w = 0;
%-----RUN ALL-----
while (icnt < 5000) && ((time + 0.5*dt) < 10)
    name = 'data%d.xlsx';
    filename = sprintf(name,(icnt/nout));
    ut=adveksi(ut,u,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    vt=adveksi(vt,v,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    un=update(u,un,ut,1/6*dt,nx,ny,iu);
    vn=update(v,vn,vt,1.0/6.0*dt,nx,ny,iu);
    um=update(u,um,ut,0.5*dt,nx,ny,iu);
    vm=update(v,vm,vt,0.5*dt,nx,ny,iu);

    ut=adveksi(ut,um,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    vt=adveksi(vt,vm,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    un=update(un,un,ut,1.0/3.0*dt,nx,ny,iu);
    vn=update(vn,vn,vt,1.0/3.0*dt,nx,ny,iu);
    um=update(u,um,ut,0.5*dt,nx,ny,iu);
    vm=update(v,vm,vt,0.5*dt,nx,ny,iu);

    ut=adveksi(ut,um,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    vt=adveksi(vt,vm,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    un=update(un,un,ut,1.0/3.0*dt,nx,ny,iu);
    vn=update(vn,vn,vt,1.0/3.0*dt,nx,ny,iu);
    um=update(u,um,ut,dt,nx,ny,iu);
    vm=update(v,vm,vt,dt,nx,ny,iu);

    ut=adveksi(ut,um,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    vt=adveksi(vt,vm,u,v,Re,dx,dy,nx,ny,iu);
    un=update(un,un,ut,1.0/6.0*dt,nx,ny,iu);
    vn=update(vn,vn,vt,1.0/6.0*dt,nx,ny,iu);
    [u,un]=swap(u,un);
    [v,vn]=swap(v,vn);

    div=divergensi(nx,ny,dx,dy,u,v,div);
    p = poisson(nx,ny,dx,dy,p,div,omega,eps,iw);

```

```

[u,v]=koreksi(nx,ny,dx,dy,u,v,p,iu);
icnt = icnt + 1;
time = time + dt;
%-----PLOT U,V, P-----
if mod(icnt,nout) == 1
    j = 1;
    w = w + 1;
    icnt
    for i=1:ny
        uplot(:,i)=u(:,j:j+402);
        vplot(:,i)=v(:,j:j+402);
        pplot(:,i)=p(:,j:j+402);
        j=j+403;
    end
    P=pplot';
    U=uplot';
    V=vplot';
%-----CEK KONVERGENSI-----
%-----silinder atas-----
    konvergensiA(w,:)=P(round(aA),round(bA)-r);
%-----silinder bawah-----
    konvergensiB(w,:)=P(round(aB),round(bB)-r);

%-----DISTRIBUSI TEKANAN-----
%-----silinder_atas-----
    for i=1:36
        teta= ((i*10)*(pi/180));
        if i>0 && i<=9
            posisiA(:,i)=rotP( pusatA,titikA,teta );

tekananA(:,i)=P(round(posisiA(1,i))+1,round(posi
siA(2,i))-1);
            else if i>9 && i<=18
                posisilA(:,i)=rotP(
pusatlA,titiklA,teta );

tekananA(:,i)=P(round(posisilA(1,i))+1,round(pos
isilA(2,i))+1);
            else if i>18 && i<=27

```

LAMPIRAN (LANJUTAN)

```

                                posisilA(:,i)=rotP(
pusatlA,titiklA,teta );

tekananA(:,i)=P(round(posisilA(1,i))-
1,round(posisilA(2,i))+1);
                                else
                                posisiA(:,i)=rotP(
pusatA,titikA,teta );

tekananA(:,i)=P(round(posisiA(1,i)),round(posisi
A(2,i)));
                                end
                                end
                                end
                                end
                                CpA(w,:) = tekananA;
%-----silinder_bawah-----
                                for i=1:36
                                teta= ((i*10)*(pi/180));
                                if i>0 && i<=9
                                posisiB(:,i)=rotP( pusatB,titikB,teta );

tekananB(:,i)=P(round(posisiB(1,i))+1,round(posi
siB(2,i))-1);
                                else if i>9 && i<=18
                                posisilB(:,i)=rotP(
pusatlB,titiklB,teta );

tekananB(:,i)=P(round(posisilB(1,i))+1,round(pos
isilB(2,i))+1);
                                else if i>18 && i<=27
                                posisilB(:,i)=rotP(
pusatlB,titiklB,teta );

tekananB(:,i)=P(round(posisilB(1,i))-
1,round(posisilB(2,i))+1);
                                else

```



```

                                posisiB(:,i)=rotP(
pusatB,titikB,teta );

tekananB(:,i)=P(round(posisiB(1,i)),round(posisi
B(2,i)));

                                end
                                end
                                end
                                end

CpB(w,:) = tekananB;
%-----KOEFSIEN HAMBAT-----
%-----silinder atas-----
for i=1:36
    teta= ((i*10)*(pi/180));
    sudut(:,i)=cos(teta);
end

CdA(w,:)=(pi/18)*(0.5*((tekananA*sudut')/tekanan
A(36)));
%-----silinder atas-----
for i=1:36
    teta= ((i*10)*(pi/180));
    sudut(:,i)=cos(teta);
end

CdB(w,:)=(pi/18)*(0.5*((tekananB*sudut')/tekanan
B(36)));
%-----
end
end

xlswrite(filename,U,1)
xlswrite(filename,V,2)
xlswrite(filename,P,3)
xlswrite(filename,konvergensiA,4)
xlswrite(filename,konvergensiB,5)
xlswrite(filename,CpA,6)
xlswrite(filename,CpB,7)

```

LAMPIRAN (LANJUTAN)

```

xlswrite(filename,CdA,8)
xlswrite(filename,CdB,9)
x = linspace(1,nx,nx);
y = linspace(1,ny,ny);
figure(1)
contourf(P)
figure(2)
contourf(U)
hold on
quiver(x,y,U,V, '-k')
figure(3)
plot(konvergensiA, '-b')
hold on
plot(konvergensiB, '-g')
legend('konv s. atas', 'konv s. bawah')
figure(4)
plot(tekananA, '-b')
hold on
plot(tekananB, '-g')
legend('Cp s. atas', 'Cp s. bawah')
figure(5)
plot(CdA, '-b')
hold on
plot(CdB, '-g')
legend('Cd s. atas', 'Cd s. bawah')

```

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Amirul Hakam. Dilahirkan di Blora pada tanggal 22 Juli 1993 dan merupakan anak kedua dari 3 bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh yaitu SDN Jepon V, MTs Negeri Jepon. Setelah menyelesaikan pendidikannya di SMAN 1 Blora, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2011. Pada masa perkuliahan

penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya. Selama menjadi mahasiswa ITS penulis aktif mengikuti organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika sebagai *staff* Departemen Sains dan Teknologi pada periode 2012-2014, Badan Eksekutif Mahasiswa Fakultas MIPA sebagai *staff ahli* Departemen Sains dan Teknologi pada periode 2012-2013 dan Organisasi ekstra kampus yaitu Paguyuban Karya Salemba Empat sebagai *staff* SSV (*Student Share Value*). Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke amirulhakam072@gmail.com.